Univerzita Komenského
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Katedra informatiky

Juraj Stacho

Geometrické vlastnosti náhodne indukovaných podgrafov polených hyperkociek

Diplomová práca
Meno školiteľa: doc. RNDr. Eduard Toman, CSc.

Bratislava 2005

Týmto prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s odbornou pomocou školiteľa.

Bratislava, apríl 2005 Juraj Stacho

Abstrakt

Stacho, J.: *Geometrické vlastnosti náhodne indukovaných podgrafov polených hyperkociek*, Diplomová práca, Univerzita Komenského Bratislava, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra informatiky, vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Eduard Toman, CSc., Bratislava 2005, 72 strán

V tejto práci sa zaoberáme popísaním vlastností štruktúry tzv. polených hyperkociek. Popisujeme všetky typy podgrafov izomorfných s polenými hyperkockami (tzv. podkociek) menších rozmerov. Ukazujeme, že existujú práve 4 typy takýchto podgrafov. V ďalšom popisujeme štruktúru prienikov týchto podgrafov. Nakoniec zavádzame diskrétny pravdepodobnostný priestor, na ktorom hľadáme hodnoty náhodných premenných popisujúcich počet podkociek obsiahnutých v náhodne vybranom podgrafe polenej hyperkocky a počet tzv. maximálnych podkociek obsiahnutých v náhodne vybranom podgrafe.

Kľúčové slová: booleovské funkcie, disjunktívne normálne formy, optimalizácia, pravdepodobnostné metódy, hyperkocky, polené hyperkocky

Abstract

Stacho, J.: *Geometric properties of randomly induced subgraphs of bisected hypercubes*, Diploma thesis, Comenius University Bratislava, Faculty of mathematics, physics and informatics, Department of Computer Science, thesis advisor: doc. RNDr. Eduard Toman, CSc., Bratislava 2005, 72 pages

The main aim of this thesis is to describe the structure of so-called bisected hypercubes. First we examine all types of subgraphs of bisected hypercubes that are isomorphic to bisected hypercubes (called subcubes) of smaller dimensions. We show that there are exactly 4 types of such subgraphs. Then we describe the structure of all intersections of these subgraphs. As a last part, we introduce discrete probabilistic space in which we look for values of random variables determining the number of subcubes contained in randomly chosen subgraph of bisected hypercube and the number of so-called maximal subcubes contained in such randomly chosen subgraph.

Keywords: boolean functions, disjunctive normal forms, optimization, probabilistic methods, hypercubes, bisected hypercubes

Obsah

Predhovor

Táto diplomová práca je prvým mojím väčším textom, ktorého písanie sa nakoniec ukázalo ako nezvyčajne dlhé a namáhavé. Väčšina nosných myšlienok vznikla počas môjho intenzívneho bádania v priebehu zimného semestra piateho ročníka. Potom mi trvalo celé tri mesiace, kým som to všetko dostal na papier v takej podobe, v akej to môžete dnes vidieť. Počas môjho skúmania som narážal na rôzne problémy, menšie či väčšie, z ktorých niektoré sa mi podarilo rozlúsknuť a výsledky z nich prameniace sa nachádzajú na nasledujúcich stranách. Boli však aj také, ktoré, či už z nedostatku času alebo jednoducho z ich komplexného charakteru, som nebol schopný vyriešiť, pričom niektoré z nich mi neprestali behať po rozume ešte aj dnes. Keďže však za každou prácou je potrebné urobiť niekedy čiaru, tak som aj ja opäť vzhľadom na obmedzenosť času ukončil skúmanie v stave, v akom ho môžete nájsť tu. Niektoré vlastnosti, ktoré sa mi nepodarilo ukázať ale verím, že ich dôkaz nebude zložitý, uvádzam aj v závere na zamyslenie.

Napriek tomu, že písanie tejto práce bolo zdĺhavé, veľmi som si cenil chvíľ, kedy sa mi počas písania podarilo niečo na mojom texte vylepšiť, napr. ukázať, že niečo platí všeobecnejšie, alebo, že dôkaz, ktorý som chcel pôvodne uviesť v tejto práci, sa dá zjednodušiť alebo zelegantniť. Bohužiaľ problém, ktorý bol obsahom témy tejto diplomovej práce, tak ako bol zadaný mojím diplomovým vedúcim, sa vo veľmi krátkom čase ukázal ako značne netriviálny a komplikovaný. Väčšina vlastností, ktoré sa očakávalo, že budú platiť, sa nakoniec ukázalo, že neplatia, resp. aspoň nie v tom tvare ako sa predpokladalo. Napriek tomu vzhľadom aj na finálny rozsah práce sa mi podarilo ukázať niektoré zaujímavé vlastnosti a poukázať aj na iné.

Chcel by som sa na tomto mieste poďakovať všetkým, ktorí nejakým spôsobom prispeli k vzniku tejto práce, a to hlavne môjmu diplomovému vedúcemu doc. Eduardovi Tomanovi za poskytnutú literatúru a cenné rady, ďalej Radoslavovi Fulekovi za jeho podnetné návrhy, ktoré vznikli pri našich nespočetných spoločných debatách, ale najviac by som chcel poďakovať mojim rodičom za ich trpezlivosť, ochotu a podporu najmä v posledných fázach písania tejto práce.

Juraj Stacho
autor

Kapitola 1

Úvod

Problematika optimalizácie booleovských funkcií je skúmaná už niekoľko desaťročí. Ukázalo sa, že zápis konkrétnej booleovskej funkcie použitím symbolov premenných a operácií $\wedge$ (logický súčin), $\vee$(logický súčet) a $\neg$ (negácia) je nejednoznačný. Definovali sa dve špeciálne normálne formy známe ako konjunktívna a disjunktívna normálna forma (KNF a DNF). Tieto normálne formy však stále pripúšťali rôzne zápisy pre tie isté funkcie. Umožnili ale zapísať ľubovoľnú booleovskú funkciu danú napr. tabuľkou hodnôt pomocou uvedených operácií. V najhoršom prípade daný zápis obsahoval exponenciálne veľa členov. Keďže sa často ukázalo, že sa niektoré členy z daného zápisu dajú vylúčiť, prípadne viaceré nahradiť jedným, záujem sa orientoval na hľadanie najkratšieho, resp. minimálneho zápisu danej booleovskej funkcie. Definovala sa tzv. skrátená forma, ktorá v sebe obsahovala len také činitele (v zmysle DNF, t.j. logického súčtu členov tvorených premennými a operáciou logického súčinu), ktoré predstavovali tzv. maximálne intervaly, resp. podkocky podgrafu n-rozmernej hyperkocky obsahujúceho vrcholy, pre ktoré hodnota danej booleovskej funkcie bola 1, tzv. grafov booleovkej funkcie. Nespomenuli sme samozrejme ten fakt, že iným prístupom, ktorý sa zvolil k hľadaniu optimálnych foriem, bolo hľadanie najmenších, čo do počtu členov, pokrytí podgrafov hyperkociek booleovskou funkciou určených. To v sebe obsahuje fakt, že každej booleovskej funkcii na n premenných je priraditeľný práve jeden podgraf n-rozmernej hyperkocky. Z tohoto prístupu vychádza aj táto práca.

Očakávalo sa, že skrátená forma bude tou optimálnou. Avšak ako sa hneď ukázalo, existujú triedy booleovských funkcií, ktorých skrátená forma nie je ich optimálnou. Sú to napr. triedy tzv. reťazových funkcií.

Ďalej sa preto začalo uvažovať o metódach získania tzv. irredudantných pokrytí, ktoré mali tú vlastnosť, že po odobratí ľubovoľnej podkocky obsiahnutej v tomto pokrytí existoval nepokrytý vrchol, resp. v jazyku DNF, po odobratí ľubovoľného člena zo zápisu existoval vektor vstupných premenných, na ktorom bola hodnota funkcie odlišná od hodnoty tohoto modifikovaného zápisu. Táto vlastnosť musí platiť aj pre optimálnu formu, preto sa očakávalo, že po získaní všetkých irredudantných pokrytí, bude stačiť vybrať z nich to najkratšie, resp. minimálne a to bude to hľadané optimálne. Vznikli algoritmy, ktoré umožnili nájsť všetky irredudantné pokrytia, avšak tých môže byť opäť exponenciálne veľa, čiže prehľadávaná množina môže byť potenciálne príliš veľká. Viac detailov k technikám optimalizácie DNF sa dá nájsť v [2].

Keďže sa vo všeobecnosti nedá povedať, že vieme nájsť optimálnu formu v dostatočne rozumnom čase, začalo sa skúmať, čo môžeme očakávať v priemernom prípade, resp. aké odhady sa dajú získať pre tzv. väčšinu booleovských funkcií. Tu do problému vstúpujú pravdepodobnostné metódy. Tieto sa v posledom období čoraz častejšie využívajú nielen k rôznym odhadom vlastností, ktoré sa vo všeobecnosti nedajú presne vypočítať, ale aj pre exaktné dôkazy špecifických vlastností, ktoré sú založené na poukázaní na existenciu, resp. neexistenciu istého objektu čisto pomocou teórie pravdepodobnosti, t.j. v ukázaní, že očakávaný počet daných objektov je nenulový, resp. nulový.

V [4], článku M. Škovieru, autor pomocou aparátu pravdepodobnostných metód ukazuje, aký je odhad veľkosti skrátenej formy pre väčšinu booleovských funkcií a z neho vyplývajúce dôsledky.

Tento článok v podstate vytvára myšlienkový rámec pre nasledujúci text. Naším úsilím nebude však skúmanie vlasností náhodných hyperkociek ako v [4], ale budeme uvažovať podobnú štruktúru, tzv. polenú hyperkocku E_n, ktorá vznikne z hyperkocky doplnením hrán v hammingovej vzdialenosti 2 (viac viď. definíciu 2.2). Na tejto štruktúre budeme skúmať vlastnosti jej náhodných podštruktúr, taktiež vlastnosti platiace pre väčšinu týchto podštruktúr.

Zameriame sa najmä na hľadanie optimálneho pokrytia, podobne ako v prípade hyperkociek, pomocou podgrafov polenej hyperkocky, ktoré však budú izomorfné s polenými hyperkockami menších rozmerov, tzv. podkocky menších rozmerov. Na tento účel bude potrebné vybudovať rozsiahlejší systém tvrdení o vlastnostiach špecifických podštruktúr aj o pravdepodobnostnom charaktere odhadov niektorých vlastností náhodných podštruktúr.

V prvom rade budeme hľadať všetky podkocky, ktoré sú obsiahnuté v polenej hyperkocke ľubovoľného rozmeru. Na základe zistenia tohoto počtu môžeme odhadovať ich očakávaný počet v náhodne zvolenom podgrafe. Navyše budeme skúmať štruktúru hranovo indukovaných podkociek (na rozdiel od doteraz uvažovaných vrcholovo indukovaných). Na tento účel sa budeme venovať popisu všetkých symetrií polených hyperkociek. Tomuto sa venujeme v kapitole 2.

Potom upriamime svoju pozornosť na prieniky podkociek obsiahnutých v ľubovoľnom podgrafe, ktoré budeme potrebovať, na zistenie disperzie a následne na vyjadrenie intervalu odhadovaného počtu podkociek v náhodne vybranom podgrafe. Na tento účel si vybudujeme formálnejšiu charakteristiku podkociek hyperkociek a následne podkociek polených hyperkociek, ktorú budeme potrebovať na jednoduchšiu enumeráciu počtu prienikov podkociek podľa ich veľkosti. Tomu je venovaná kapitola 3. Následnej enumerácii prienikov je venovaná kapitola 4.

Na záver budeme skúmať pomocou pravdepodobnostných metód vyjadrenie odhadu počtu podkociek v náhodne vybranom podgrafe, ďalej odhadu minimálneho rozmeru podgrafu už neobsiahnutého v náhodne vybranom podgrafe a taktiež zavedieme pojem už spomínanej maximálnej podkocky a podobne budeme hľadať odhad počtu maximálnych podkociek v náhodne vybranom podgrafe.

Na tento účel sa na tieto vlastnosti pozrieme trochu všeobecnejšie, budeme uvažovať nejakú množinu prvkov a množinu jej podmnožín, z ktorých môžeme konštruovať pokrytia ľubovoľnej náhodne vybranej podmnožiny. Spomínané odhady určíme na tejto štruktúre a v závere aplikujeme špecificky na grafy hyperkociek, kompletných grafov a polených hyperkociek. Na tento účel budeme potrebovať všetky získané tvrdenia z predošlých kapitol. Pravdepodobnostným odhadom sa venujeme v kapitole 5.

V závere sumarizujeme všetky významné dosiahnuté výsledky a uvedieme ďalšie možnosti rozvíjania textu tejto práce (aj s naznačením očakávateľného spôsobu).

Symbol	**Popis**
$\mathbb{N}$	množina všetkých prirodzených čísel
$\mathbb{R}$	množina všetkých reálnych čísel
2^X	množina všetkých podmnožín množiny X, potenčná množina
$\#_a(w)$	počet symbolov a v slove (vektore) w
$\binom{n}{k}$	počet spôsobov výberu k prvkov z n prvkovej množiny
e_k	jednotkový vektor $e_k = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{k}, 0, \ldots, 0)$
$\lfloor x \rfloor$	dolná celá časť čísla x, $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$
$\lceil x \rceil$	horná celá časť čísla x, $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x\}$
$\lvert x \rvert$	absolútna hodnota čísla x, $\lvert x \rvert = \max\{x, -x\}$
$\lvert \alpha \rvert$	hammingova váha vektora α, $\lvert \alpha \rvert = \sum_{i=1}^{n} \lvert \alpha_i \rvert$
$\sim$	$f(n) \sim g(n)$, ak $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$
$o(g)$	$f(n) = o(g(n))$, ak $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
$<a, b>$	uzavretý interval medzi a a b, $<a, b>= \{x \mid a \leq x \leq b\}$
(a, b)	otvorený interval medzi a a b, $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$

Tabuľka 1.1: Vybrané symboly použité v texte a ich význam

Kapitola 2

Štruktúra E_n

V tejto kapitole sa budeme zaoberať detailným popisom štruktúry polených hyperkociek. Identifikujeme štyri rôzne typy podštruktúr izomorfných s polenými hyperkockami a pozrieme sa podrobnejšie na otázku počtu symetrií polenej hyperkocky.

Na úvod si uveďme zopár definícií, medzi nimi aj definíciu hyperkocky a polenej hyperkocky, ktorú budeme v celom texte potrebovať.

Definícia 2.1. Pod pojmom hyperkocka Q_n budeme rozumieť graf $Q_n = (V, E)$, kde množina vrcholov je tvorená vektormi n rozmerného vektorového priestoru nad Z_2, t.j. $V = \{0, 1\}^n$ a množina hrán je určená nasledovne:

$$E = \{\ (\alpha, \beta)\ |\ |\alpha - \beta| = 1\ \}$$

kde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$, ak $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Definícia 2.2. Pod pojmom polená hyperkocka E_n budeme rozumieť graf $E_n = (V, E)$, kde $V = \{0, 1\}^n$ a pre E platí:

$$E = \{\ (\alpha, \beta)\ |\ 1 \leq |\alpha - \beta| \leq 2\ \}$$

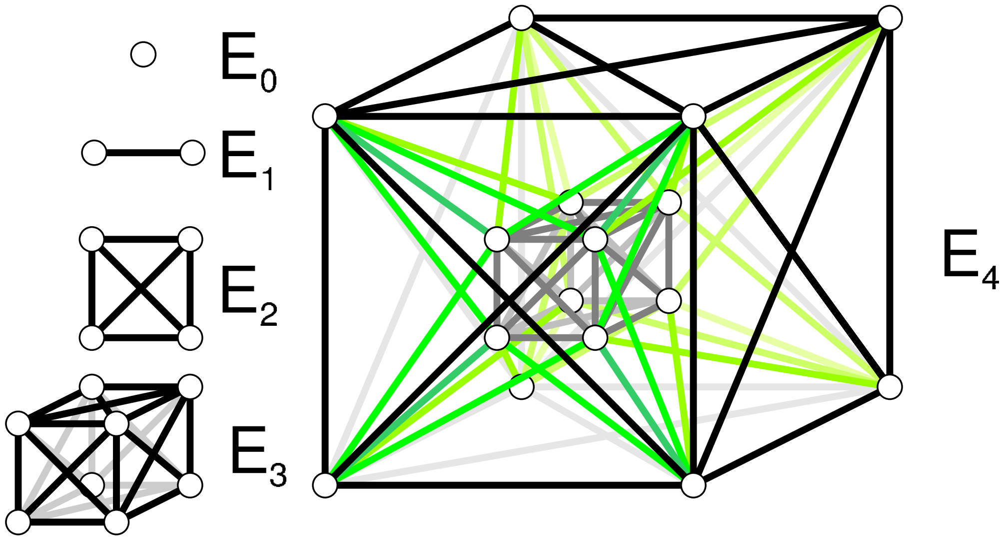
Definícia 2.3. Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf. Nech $X \subseteq V$ je ľubovoľná podmnožina jeho vrcholov. Potom graf $H_X = (X, E_X)$ nazveme vrcholovo indukovaným podgrafom grafu G, ak platí:

$$E_X = \{\ (u, v)\ |\ u, v \in X \wedge (u, v) \in E(G)\ \}$$

Keďže vrcholovo indukovaný podgraf je jednoznačne určený jeho množinou vrcholov, budeme tento graf a jeho množinu vrcholov zamieňať podľa potreby.

Definícia 2.4. Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf. Nech $Y \subseteq E$ je ľubovoľná podmnožina jeho hrán. Potom graf $H_Y = (V_Y, Y)$ nazveme hranovo indukovaným podgrafom grafu G, ak platí:

$$V_Y = \{\ u\ |\ (\exists v \in V)\ (u, v) \in Y \vee (v, u) \in Y\ \}$$



Obrázok 2.1: Vizualizácia hyperkociek E_0 až E_4

Rovnako ako v prípade vrcholovo indukovaných podgrafov budeme podľa potreby zamieňať množinu hrán a graf ním indukovaný.

Definícia 2.5. Nech G a H sú ľubovoľné dva grafy. Pod izomorfizmom grafov φ budeme rozumieť bijektívne zobrazenie z $V(G)$ do $V(H)$, pre ktoré platí:

$$(\forall u, v \in V(G)) : \ (u, v) \in E(G) \iff (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(H)$$

Ak bijektívne zobrazenie $\varphi : V(G) \to V(H)$ má uvedenú vlastnosť, hovoríme tiež, že zachováva hrany. Ak existuje izomorfizmus medzi grafmi G a H, hovoríme, že grafy sú izomorfné. Izomorfizmus z G do G sa tiež nazýva automorfizmus.

Skúmanie vlastností polených hyperkociek začneme preskúmaním ich štruktúry. Budeme sa snažiť zistiť, aké charakteristické podštruktúry môžeme v danej polenej hyperkocke nájsť. Najviac sa však budeme sústredovať na hľadanie izomorfných obrazov polených hyperkociek menších rozmerov, čo budeme v neskorších pasážach potrebovať.

2.1 Obyčajné hyperkocky

Na začiatok sa najprv pozrime, čo vieme o obyčajných hyperkockách. Z definície 2.2 polenej hyperkocky priamo vyplýva, že každá polená hyperkocka je nadgrafom nejakej obyčajnej hyperkocky rovnakého rozmeru. Je teda zrejmé, že každý podgraf danej obyčajnej hyperkocky je aj podgrafom prislúchajúcej polenej hyperkocky. Nás predovšetkým zaujímajú podgrafy obyčajných hyperkociek izomorfné s obyčajnými hyperkockami nižších rozmerov. Ako sa ukáže, tieto podgrafy, ak sa prenesú do korešpondujúcej polenej hyperkocky a doplnia o príslušné indukované hrany, budú izomorfné s polenými hyperkockami prislúchajúcich rozmerov. Poďme sa o tom presvedčiť.

Definícia 2.6. Nech $n, m \in \mathbb{N}$; $m \leq n$. Nech β je vektor, $\beta \in \{0, 1, *\}^n$. Nech $\#_*(\beta) = m$ (počet výskytov symbolu $*$ vo vektore β). Pod symbolom ${}^{(1)}E_m^\beta$ budeme rozumieť vrcholovo indukovaný podgraf polenej hyperkocky E_n (tzv. podštruktúru prvého typu) pre zadané β, ktorého množina vrcholov obsahuje všetky vektory $\alpha \in \{0, 1\}^n$, ktoré vzniknú z β doplnením symbolov 0, resp. 1 na miesta tých súradníc, ktoré sú obsadené symbolom $*$.

Napríklad nech $\beta = (0, 1, *, *, 1)$. Potom β určuje množinu vrcholov

$$^{(1)}E_m^\beta = \{(0, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 1)\}$$

Lema 2.7. *Nech $n, m \in \mathbb{N}$; $m \leq n$. Nech $\beta \in \{0, 1, *\}^n$ a $\#_*(\beta) = m$. Potom platí*

$$^{(1)}E_m^\beta \cong E_m$$

Dôkaz. Nech I je množina indexov z $\{1, \ldots, n\}$ súradníc symbolov $*$ v β, t.j. $I = \{\ i \mid \beta_i = *\}$. Potom je zrejmé, že $|I| = m$. Označme si prvky množiny I ako $i_1, i_2, \ldots i_m$ usporiadané v ľubovoľnom, ale pevnom poradí. Označme i_j^{-1} pre $j \in I$, také k, že $i_k = j$. Potom uvažujme nasledovné zobrazenie Φ z $V(E_m)$ do $V({}^{(1)}E_m^\beta)$:

$$\Phi(\alpha) = \gamma \iff \gamma_j = \begin{cases} \beta_j & j \notin I \\ \alpha_{i_j^{-1}} & j \in I \end{cases}$$

Uvedené zobrazenie je injektívne, lebo ak $\alpha \neq \alpha'$, potom musí existovať k také, že $\alpha_k \neq \alpha'_k$, potom ale $\gamma_{i_k} \neq \gamma'_{i_k}$, ale tým pádom aj $\gamma \neq \gamma'$, kde $\gamma = \Phi(\alpha)$ a $\gamma' = \Phi(\alpha')$. Je taktiež surjektívne, lebo ak $\gamma \in V({}^{(1)}E_m^\beta)$, potom z definície tento vektor na súradniciach j nepatriacich do I je zhodný s β_j. Zostrojíme vektor α taký, že $\alpha_j = \gamma_{i_j}$. Z toho už zrejme vyplýva, že $\Phi(\alpha) = \gamma$.

Aby sme dokázali, že Φ je izomorfizmus, musíme ešte ukázať, že zachováva hrany, t.j. ak $(\alpha, \alpha') \in E(E_m)$, potom $(\Phi(\alpha), \Phi(\alpha')) \in E({}^{(1)}E_m^\beta)$. Nech teda $(\alpha, \alpha') \in E(E_m)$. Potom z definície platí, že $|\alpha - \alpha'| = 1$. Počítajme $|\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha')|$.

$$\begin{aligned} |\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha')| &= \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - \alpha'_j| = \sum_{j \notin I} |\beta_j - \beta_j| + \sum_{j \in I} |\alpha_{i_j^{-1}} - \alpha'_{i_j^{-1}}| = \\ &= \sum_{\substack{j \in I \\ k = i_j^{-1}}} |\alpha_k - \alpha'_k| = \sum_{\substack{j \in I \\ j = i_k}} |\alpha_k - \alpha'_k| = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k - \alpha'_k| = |\alpha - \alpha'| \end{aligned}$$

Z toho dostávame, že dané zobrazenie nielenže zachováva hrany, ale aj ich dĺžky (t.j. hamminová vzdialenosť koncov hrán sa zachováva). Preto z toho vyplýva, že ${}^{(1)}E_m^\beta \cong E_m$. □

Dôsledok 2.8. *Nech platia predpoklady lemy 2.7. Nech* $Q_m^\beta = (V, E)$ *je taký graf, že* $V = V({}^{(1)}E_m^\beta)$ *a* $E = E({}^{(1)}E_m^\beta) \cap E(Q_n)$. *Potom*

$$Q_m^\beta \cong Q_m$$

Dôkaz. Zrejmý z dôkazu predošlej lemy. ☐

Predošlá lema a jej dôsledok popisujú prvý typ podštruktúr, ktoré môžeme objaviť v hyperkocke, resp. polenej hyperkocke. Dá sa ukázať, že obyčajné hyperkocky už neobsahujú žiaden iný typ podštruktúry, ktorá by bola izomorfná s hyperkockou vhodného rozmeru. Ako sa ale ukáže, neplatí to pre polené hyperkocky.

V ďalšom si popíšeme druhý typ podštruktúr, ktoré sa v polenej hyperkocke dajú nájsť. Jedná sa o podgraf na hranách len medzi vrcholmi vo vzdialenosti 2 a ako sa ukáže, bude izomorfný s polenou hyperkockou vhodného rozmeru.

2.2 Paritné podkocky

Definícia 2.9. Nech $n, m \in \mathbb{N}$; $m \leq n$. Nech β je vektor, $\beta \in \{0, 1, *\}$ a nech $\#_*(\beta) = m$. Nech $i \in \{0, 1\}$. Potom pod symbolom ${}^{(2)}_{\ i}E_m^\beta$ (podštruktúra druhého typu) budeme rozumieť podgraf grafu ${}^{(1)}E_m^\beta$ vrcholovo indukovaný, pre ktorý platí

$$\alpha \in V({}^{(2)}_{\ i}E_m^\beta) \iff |\alpha| \equiv i \pmod 2$$

Tak ako sme už naznačili, ${}^{(2)}_{\ i}E_m^\beta$ obsahuje len hrany spájajúce vrcholy vo vzdialenosti 2, lebo pre ľubovoľné dva vrcholy $\alpha, \alpha' \in {}^{(2)}_{\ i}E_m^\beta$ zrejme platí, že $|\alpha - \alpha'| \equiv 0 \pmod 2$.

Lema 2.10. *Nech* $n, m \in \mathbb{N}$; $m < n$. *Nech* β *je vektor,* $\beta \in \{0, 1, *\}$ *a nech* $\#_*(\beta) = m + 1$. *Nech* $i \in \{0, 1\}$. *Potom platí:*

$${}^{(2)}_{\ i}E_{m+1}^\beta \cong E_m$$

Dôkaz. Použijeme lemu 2.7 pre $m + 1$ a dostávame ${}^{(1)}E_{m+1}^\beta \cong E_{m+1}$. Nech Φ je korešpondujúce zobrazenie z použitej lemy. Nech $i_0 \in \{0, 1\}$ je parita súčtu nehviezdičkových súradníc β, t.j. $i_0 \equiv \sum_{j \notin I} |\beta_j| \pmod 2$, kde I je množina indexov $*$ súradníc ako v leme 2.7. Nech Ψ je zobrazenie z $V(E_m)$ do $V(E_{m+1})$ definované nasledovne:

$$\Psi(\alpha) = \gamma \iff \gamma_j = \begin{cases} \alpha_j & j \leq m \\ i_\alpha & j = m + 1 \end{cases}$$

kde $i_\alpha \in \{0, 1\}$ je určené nasledovne: $i_\alpha \equiv i - i_0 + |\alpha| \pmod 2$.

Ukážeme, že $\Phi \circ \Psi$ je hľadané zobrazenie. Nech $\alpha \in E_m$. Nech $\gamma = \Psi(\alpha)$.Počítajme $|\Phi(\gamma)|$:

$$|\Phi(\gamma)| = \sum_{j \notin I} |\beta_j| + \sum_{j \in I} |\gamma_{i_j^{-1}}| = \sum_{j \notin I} |\beta_j| + \sum_{\substack{j \in I \\ i_k = j}} |\gamma_k| = \sum_{j \notin I} |\beta_j| + \sum_{k=1}^{m+1} |\gamma_k| =$$

$$= \sum_{j \notin I} |\beta_j| + \sum_{k=1}^{m} |\gamma_k| + |\gamma_{m+1}| = \sum_{j \notin I} |\beta_j| + \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| + i_\alpha = \sum_{j \notin I} |\beta_j| + |\alpha| + i_\alpha$$

Z toho dostávame, že $\Phi(\Psi(\alpha)) \in V({}^{(2)}_{i}E^{\beta}_{m+1})$, pretože platí:

$$|\Phi(\Psi(\alpha))| \equiv i_0 + |\alpha| + i_\alpha \equiv i_0 + |\alpha| + i - i_0 + |\alpha| \equiv i \pmod 2$$

Keďže evidentne Ψ je bijektívne a Φ taktiež, je aj $\Phi \circ \Psi$ bijektívne. Potrebujeme už len ukázať, že zachováva hrany. Počítajme $|\Phi(\Psi(\alpha)) - \Phi(\Psi(\alpha'))|$:

$$|\Phi(\Psi(\alpha)) - \Phi(\Psi(\alpha'))| = |\Psi(\alpha) - \Psi(\alpha')| = \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j - \alpha'_j| + |i_\alpha - i_{\alpha'}| =$$

$$= |\alpha - \alpha'| + (|\alpha| - |\alpha'| \bmod 2) = |\alpha - \alpha'| + (|\alpha - \alpha'| \bmod 2) \equiv 0 \pmod 2$$

Z toho vyplýva, že $|\Phi(\Psi(\alpha)) - \Phi(\Psi(\alpha'))| \geq |\alpha - \alpha'|$. Čiže ak $|\alpha - \alpha'| > 2$, potom $|\Phi(\Psi(\alpha)) - \Phi(\Psi(\alpha'))| > 2$. Ak naopak platí, že $1 \leq |\alpha - \alpha'| \leq 2$, tak $|\Phi(\Psi(\alpha)) - \Phi(\Psi(\alpha'))| = 2$.

Čiže ak sa hrana (α, α') nachádza v E_m, t.j. $|\alpha - \alpha'| \leq 2$, tak vtedy a len vtedy sa $(\Phi(\Psi(\alpha)), \Phi(\Psi(\alpha')))$ nachádza v ${}^{(2)}_{i}E^{\beta}_{m+1}$, z čoho vyplýva, že graf E_m je izomorfný s ${}^{(2)}_{i}E^{\beta}_{m+1}$, čo sme chceli dokázať. □

Našli a popísali sme teda druhý typ podgrafov, ktorý nás bude zaujímať. V ďalšom popíšeme trochu iné dva typy podgrafov. Budú to podgrafy izomorfné s kompletným grafov K_m. Keďže do každého kompletného grafu je možné vnoriť ľubovoľný graf na danom počte vrcholov, budeme tieto podgrafy potrebovať na určenie ďalších podgrafov izomorfných s polenou hyperkockou vhodného rozmeru.

2.3 Kompletné podgrafy

Definícia 2.11. Nech $n, m \in \mathbb{N}; m \leq n$. Nech $\beta \in \{0, 1, *\}^n$ a nech $\#_*(\beta) = m$. Nech $\alpha \in V({}^{(1)}E^{\beta}_{m})$. Potom symbolom ${}^{(3)}_{\alpha}E^{\beta}_{m}$ (podštruktúra tretieho typu) budeme označovať podgraf grafu ${}^{(1)}E^{\beta}_{m}$ vrcholovo indukovaný, pre ktorý platí:

$$\gamma \in V({}^{(3)}_{\alpha}E^{\beta}_{m}) \iff |\gamma - \alpha| \leq 1$$

Definícia 2.12. Nech $n, m \in \mathbb{N}; m \leq n$. Nech $\beta \in \{0, 1, *\}^n$ a nech $\#_*(\beta) = m$. Nech $\alpha \in V({}^{(1)}E_m^\beta)$. Potom symbolom ${}^{(4)}_{\alpha}E_m^\beta$ (podštruktúra štvrtého typu) budeme označovať podgraf grafu ${}^{(1)}E_m^\beta$ vrcholovo indukovaný, pre ktorý platí:

$$\gamma \in V({}^{(4)}_{\alpha}E_m^\beta) \iff |\gamma - \alpha| = 1$$

Lema 2.13. *Nech $n, m \in \mathbb{N}; m - 1 \leq n$. Nech $\beta \in \{0, 1, *\}^n$ a nech $\#_*(\beta) = m - 1$. Nech $\alpha \in V({}^{(1)}E_{m-1}^\beta)$. Potom platí:*

$${}^{(3)}_{\alpha}E_{m-1}^\beta \cong K_m$$

Dôkaz. Nech $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}\}$ je množina indexov definovaná tak ako v dôkaze lemy 2.7. Nech množinu vrcholov K_m tvoria prirodzené čísla od 0 po $m-1$. Potom uvažujme zobrazenie Φ z $V(K_m)$ do $V({}^{(3)}_{\alpha}E_{m-1}^\beta)$ určené nasledovne:

$$\Phi(j) = \begin{cases} \alpha & j = 0 \\ \alpha + e_{i_j} & j > 0 \end{cases}$$

Z definície je vidieť, že $\Phi(j) \in V({}^{(1)}E_{m-1}^\beta)$, buď $\Phi(j) = \alpha$, alebo $\Phi(j) = \alpha + e_{i_j}$, lenže $i_j \in I$ a keďže $\alpha \in V({}^{(1)}E_{m-1}^\beta)$, potom $\alpha + e_{i_j}$ sa líši od α na súradnici i_j, kde $\beta_{i_j} = *$ (čo vyplýva z definície I), čiže musí patriť do $V({}^{(1)}E_{m-1}^\beta)$.

Ďalej sa dá jednoducho ukázať, že Φ je bijektívne. Stačí už len overiť, či zachováva hrany. Počítajme $|\Phi(j) - \Phi(j')|$. Ak $j' = 0$, tak už z definície vyplýva, že $|\Phi(j) - \Phi(0)| = |\Phi(j) - \alpha| \leq 1$. Nech teda $j, j' \neq 0$; $j \neq j'$:

$$|\Phi(j) - \Phi(j')| = |\alpha + e_{i_j} - \alpha - e_{i_{j'}}| = |e_{i_j} - e_{i_{j'}}| = 2$$

Z toho je teda vidieť, že zobrazenie zachováva aj hrany a je to teda izomorfizmus, čo sme chceli dokázať. $\square$

Dôsledok 2.14. *Nech $n, m \in \mathbb{N}; m \leq n$. Nech $\beta \in \{0, 1, *\}^n$ a nech $\#_*(\beta) = m$. Nech $\alpha \in V({}^{(1)}E_m^\beta)$. Potom platí:*

$${}^{(4)}_{\alpha}E_m^\beta \cong K_m$$

Dôkaz. Z uvedených definícií priamo vyplýva, že $V({}^{(4)}_{\alpha}E_m^\beta) = V({}^{(3)}_{\alpha}E_m^\beta) \backslash \{\alpha\}$. Z lemy 2.13 dostávame, že $V({}^{(3)}_{\alpha}E_m^\beta) \cong K_{m+1}$. Nech Φ je príslušné zobrazenie. Nech množinu vrcholov K_m tvoria prirodzené čísla od 1 po m. Potom zobrazenie Φ' z K_m do $V({}^{(4)}_{\alpha}E_m^\beta)$ definované ako $\Phi'(j) = \Phi(j)$ je priamo izomorfizmom medzi K_m a $V({}^{(4)}_{\alpha}E_m^\beta)$, čo sme chceli dokázať. $\square$

Definovali a ukázali sme, že v grafe polenej hyperkocky E_n existujú kompletné podgrafy dvoch typov. Teraz však ukážeme, že sa s inými kompletnými podgrafmi v polenej hyperkocke nestretneme, resp. presnejšie, ak zvolený podgraf E_n je izomorfný s K_m pre nejaké m, potom je to buď ${}^{(3)}_{\alpha}E_{m-1}^\beta$ alebo ${}^{(4)}_{\alpha}E_m^\beta$, alebo ${}^{(1)}E_2^\beta$, alebo ${}^{(2)}_{i}E_3^\beta$ pre vhodné β, α, i.

Definícia 2.15. Nech $H = (V, E)$ je ľubovoľný neorientovaný graf. Nech $v \in V(H)$ je ľubovoľný vrchol. Pod symbolom $N_H(v)$ budeme označovať množinu vrcholov z $V(H)$ susediacich s v, t.j. $N_H(v) = \{ u \mid (u, v) \in E(H) \}$. Nech X je ľubovoľná množina vrcholov H, $X \subseteq V(H)$. Potom symbolom $N_H(X)$ budeme označovať množinu vrcholov H susediacich s každým z vrcholom z X, t.j. $N_H(X) = \{ u \mid (\forall v \in X) : (u, v) \in E(H) \}$.

Lema 2.16. *Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Nech H je podgraf E_n vrcholovo indukovaný, izomorfný s K_m. Nech existujú také vrcholy $\alpha, \alpha' \in V(H)$, že $|\alpha - \alpha'| = 1$. Ak $m \neq 4$, potom existuje $\beta \in \{0, 1, *\}^n$ také, že buď $H = {}^{(3)}_{\alpha}E^{\beta}_{m-1}$ alebo $H = {}^{(3)}_{\alpha'}E^{\beta}_{m-1}$. Ak $m = 4$, tak platí jeden z predošlých prípadov alebo $H = {}^{(1)}E^{\beta}_{2}$.*

Dôkaz. Pre ľubovoľný vrchol γ kompletného grafu K_m zrejme platí $N_{K_m}(\gamma) = V(K_m) \backslash \{\gamma\}$. To musí taktiež platiť pre ľuboľný vrchol H, t.j. nech $\gamma \in V(H)$, potom $N_H(\gamma) \cup \{\gamma\} = V(H)$. Keďže H je podgraf E_n, platí, že $V(H) \subseteq V(E_n)$, a teda zrejme platí, že $N_H(\gamma) \subseteq N_{E_n}(\gamma)$. Z toho dostávame, že platí $V(H) \subseteq \{\gamma\} \cup N_{E_n}(\gamma)$. To platí aj pre $\alpha, \alpha' \in V(H)$. Z toho môžeme usúdiť, že platí:

$$V(H) \subseteq \{\alpha, \alpha'\} \cup (N_{E_n}(\alpha) \cap N_{E_n}(\alpha'))$$

Popíšme si ako vyzerá $N_{E_n}(\alpha, \alpha') = N_{E_n}(\alpha) \cap N_{E_n}(\alpha')$. Nech $\gamma \in N_{E_n}(\alpha, \alpha')$. Potom $|\gamma - \alpha| \leq 2$ a $|\gamma - \alpha'| \leq 2$. Keďže $|\alpha - \alpha'| = 1$, existuje k_1 také, že $\alpha' = \alpha + e_{k_1}$.

Nech najprv $|\gamma - \alpha| = 2$. Potom existujú $k \neq l$ také, že $\gamma = \alpha + e_k + e_l$. Počítajme $|\gamma - \alpha'| = |\alpha + e_k + e_l - \alpha - e_{k_1}| = |e_k + e_l + e_{k_1}|$. Ak $k_1 \neq l$ a $k_1 \neq k$, potom $|\gamma - \alpha'| = 3$. Z toho by vyplývalo, že $\gamma \notin N_{E_n}(\alpha')$. Môžeme teda predpokladať, že $k_1 = l$. Potom $\gamma = \alpha' + e_k$, a teda $\gamma \in N_{E_n}(\alpha')$.

V opačnom prípade $|\gamma - \alpha| = 1$. Nech $\gamma = \alpha + e_k$ a $\gamma \neq \alpha'$. Potom $|\gamma - \alpha'| = |\alpha + e_k - \alpha - e_{k_1}| = |e_k + e_{k_1}| = 2$, a teda $\gamma \in N_{E_n}(\alpha')$.

Nakoniec dostávame, že množina spoločných susedných vrcholov k α, α' je

$$N_{E_n}(\alpha, \alpha') = N_{E_n}(\alpha) \cap N_{E_n}(\alpha') = \{ \alpha + e_k, \alpha' + e_k \mid k \in \{1, \dots, n\} \}$$

Nech γ, γ' sú ďalšie dva vrcholy z V(H). Najprv uvažujeme, že existujú $k_2 \neq k_3$ také, že $\gamma = \alpha + e_{k_2}, \gamma' = \alpha + e_{k_3}$. Potom sa dá ukázať, že $N_{E_n}(\alpha, \alpha', \gamma, \gamma') \subseteq \{ \alpha + e_k \mid k \in \{1, \dots n\} \}$. Predpokladajme, že $\alpha' + e_k \in N_{E_n}(\alpha, \alpha', \gamma, \gamma')$. Keďže $\alpha' = \alpha + e_{k_1}$, predpokladajme, že $k \neq k_1$. Potom $|\gamma - \alpha' - e_k| = |\alpha + e_{k_2} - \alpha - e_{k_1} - e_k| = |e_k + e_{k_1} + e_{k_2}|$. Ak $k \neq k_1$ a $k \neq k_2$, potom $|\gamma - \alpha' - e_k| = 3$. Predpokladajme teda, že $k = k_2$. Počítajme ďalej: $|\gamma' - \alpha' - e_k| = |e_k + e_{k_1} + e_{k_3}|$. Keďže $k = k_2$, potom ale $k_3 \neq k$, a teda platí $|\gamma' - \alpha' - e_k| = 3$.

Z toho dostávame, že ak vyberieme ako piaty vrchol k uvedeným vrcholom vrchol tvaru $\alpha' + e_k$, tak v grafe E_n nebude existovať hrana buď medzi γ a $\alpha' + e_k$ alebo medzi γ' a $\alpha' + e_k$, a teda musí platiť, že $N_{E_n}(\alpha, \alpha', \gamma, \gamma') \subseteq \{ \alpha + e_k \mid k \in \{1, \dots n\} \}$.

Analogicky ak predpokladáme, že $\gamma = \alpha' + e_{k_1}$ a $\gamma' = \alpha' + e_{k_2}$, dostávame, že $N_{E_n}(\alpha, \alpha', \gamma, \gamma') \subseteq \{ \alpha' + e_k \mid k \in \{1, \dots n\} \}$.

Predpokladajme teda, že $\gamma = \alpha + e_{k_2}$ a $\gamma' = \alpha' + e_{k_3}$. Počítajme: $|\gamma - \gamma'| = |\alpha + e_{k_2} - \alpha - e_{k_1} - e_{k_3}| = |e_{k_1} + e_{k_2} + e_{k_3}|$. Keďže predpokladáme, že $\gamma \neq \alpha'$ a $\gamma' \neq \alpha$, tak platí, že $k_1 \neq k_2$ a $k_1 \neq k_3$. Ak $k_2 \neq k_3$, potom $|\gamma - \gamma'| = 3$. Z toho dostávame, že $k_2 = k_3$.

Dá sa ukázať, že $N_{E_n}(\alpha, \alpha', \gamma, \gamma') = \emptyset$. Predpokladajme, že existuje k také, že $\alpha + e_k \in N_{E_n}(\alpha, \alpha', \gamma, \gamma')$. Keďže $\alpha' = \alpha + e_{k_1}$ a $\gamma = \alpha + e_{k_2}$, môžeme tiež predpokladať, že $k \neq k_1$ a $k \neq k_2$. Potom počítajme $|\gamma' - \alpha - e_k| = |\alpha + e_{k_1} + e_{k_2} - \alpha - e_k| = |e_k + e_{k_1} + e_{k_2}| = 3$. Analogicky aj pre prípad $\alpha' + e_k$. Z toho nám vyplýva, že ak vyberieme ľubovoľný vrchol zo susedných vrcholov $\{\gamma, \gamma', \alpha, \alpha'\}$ tak, vždy medzi nimi bude existovať jeden, ktorý nebude mať hranu s daným vrcholom, čiže platí, že $N_{E_n}(\alpha, \alpha', \gamma, \gamma') = \emptyset$.

Na záver si zhrňme všetky uvažované možnosti. V prvom prípade dostávame $V(H) = \{\alpha, \alpha + e_{k_1}, \alpha + e_{k_2}, \alpha + e_{k_3}, \ldots, \alpha + e_{m-1}\}$. Definujme množinu I ako množinu indexov k_j vektorov z uvažovanej $V(H)$, t.j. $I = \{\ k \mid \alpha + e_k \in V(H)\ \}$. Na základe tejto množiny definujme vektor $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, pre ktorý platí

$$\beta_j = \begin{cases} \alpha_j & j \notin I \\ * & j \in I \end{cases}$$

Z toho už priamo vyplýva, že $H = {}^{(3)}_{\alpha}E^{\beta}_{m-1}$ (stačí overiť definíciu). Analogicky v druhom prípade dostávame, že $H = {}^{(3)}_{\alpha'}E^{\beta}_{m-1}$.

Pre prípad $m = 4$ platí navyše aj tretí prípad rozboru, kedy množina H obsahuje vektory $H = \{\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'\}$. Keďže $\alpha' = \alpha + e_{k_1}$, $\gamma = \alpha + e_{k_2}$ a $\gamma' = \alpha' + e_{k_3}$ a navyše $k_2 = k_3$, tak množina $I = \{k_1, k_2\}$. Potom použijme vyššie uvedenú definíciu β pre I. Z toho už priamo vyplýva, že $H = {}^{(1)}E^{\beta}_{2}$. □

Lema 2.17. *Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Nech H je podgraf E_n vrcholovo indukovaný, izomorfný s K_m. Nech pre všetky vrcholy $\gamma, \gamma' \in V(H)$ platí, že $|\gamma - \gamma'| = 2$. Ak $m \neq 4$ potom existuje $\hat{\alpha} \in V(E_n)$ a $\beta \in \{0, 1, *\}^n$ také, že $H = {}^{(4)}_{\hat{\alpha}}E^{\beta}_{m}$. Ak $m = 4$, tak $H = {}^{(4)}_{\hat{\alpha}}E^{\beta}_{m}$ alebo existuje $i \in \{0, 1\}$ také, že $H = {}^{(2)}_{i}E^{\beta}_{3}$.*

Dôkaz. Detailný dôkaz je v mnohom podobný predchádzajúcemu, preto upozorníme len na kľúčové časti. Nech $\alpha, \alpha' \in V(H)$. Potom $|\alpha - \alpha'| = 2$, t.j. existuje k_1, k_2 také, že $\alpha' = \alpha + e_{k_1} + e_{k_2}$. Podobne ako v predošlom prípade sa dá ukázať, že $N_{E_n}(\alpha, \alpha') \subseteq \{\ \alpha + e_{k_1} + e_k,\ \alpha + e_{k_2} + e_k \mid k \in \{1, \ldots, n\}\ \}$.

Nech $\gamma, \gamma' \in V(H)$ sú ďalšie vrcholy. Predpokladajme, že $\gamma = \alpha + e_{k_1} + e_{k_3}$ a $\gamma' = \alpha + e_{k_1} + e_{k_4}$. Na základe toho sa dá ukázať, že $N_{E_n}(\alpha, \alpha', \gamma, \gamma') \subseteq \{\ \alpha + e_{k_1} + e_k \mid k \in \{1, \ldots, n\}\ \}$. Podobne aj ak $\gamma = \alpha + e_{k_2} + e_{k_3}$ a $\gamma' = \alpha + e_{k_2} + e_{k_4}$, tak $N_{E_n}(\alpha, \alpha', \gamma, \gamma') \subseteq \{\ \alpha + e_{k_2} + e_k \mid k \in \{1, \ldots, n\}\ \}$. Nakoniec ak $\gamma = \alpha + e_{k_1} + e_{k_3}$ a $\gamma' = \alpha + e_{k_2} + e_{k_4}$, tak $k_4 = k_3$ a $N_{E_n}(\alpha, \alpha', \gamma, \gamma') = \emptyset$.

Z toho už dostávame podobne ako v predošlom prípade, že buď $H = {}^{(4)}_{\hat{\alpha}}E^{\beta}_{m}$ pre $\hat{\alpha} = \alpha + e_{k_1}$ resp. $\hat{\alpha} = \alpha + e_{k_2}$ pre β definované podľa $I_1 = \{\ k \mid \alpha + e_{k_1} + e_k \in V(H)\}$ resp. $I_2 = \{\ k \mid \alpha + e_{k_2} + e_k \in V(H)\}$ alebo $H = {}^{(2)}_{i}E^{\beta}_{3}$ pre β definované podľa $I = \{k_1, k_2, k_3\}$ a $i \equiv |\alpha| \pmod 2$. □

Zhrnieme predošlé úvahy vo vete:

Veta 2.18. *Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Nech H je ľubovoľný podgraf polenej hyperkocky E_n izomorfný s K_m. Potom existuje $\alpha \in V(E_n)$, $i \in \{0,1\}$ a $\beta \in \{0,1,*\}^n$ také, že buď $H = {}^{(3)}_{\alpha}E^{\beta}_{m-1}$ alebo $H = {}^{(4)}_{\alpha}E^{\beta}_{m}$, alebo $H = {}^{(1)}E^{\beta}_{2}$, alebo $H = {}^{(2)}_{i}E^{\beta}_{3}$.*

Dôkaz. Nech existujú v H také dva vrcholy $\alpha, \alpha' \in V(H)$, že $|\alpha - \alpha'| = 1$. Potom použijeme lemu 2.16 a dostávame, že $H = {}^{(3)}_{\alpha}E^{\beta}_{m-1}$ alebo $H = {}^{(3)}_{\alpha'}E^{\beta}_{m-1}$, alebo $H = {}^{(1)}E^{\beta}_{2}$. Naopak, ak pre všetky vrcholy $\alpha, \alpha' \in V(H)$ platí $|\alpha - \alpha'| = 2$, použijeme lemu 2.17 a dostávame, že $H = {}^{(4)}_{\hat{\alpha}}E^{\beta}_{m}$ alebo $H = {}^{(2)}_{i}E^{\beta}_{3}$.

Z uvedeného rozboru dostávame hľadané tvrdenie. □

2.4 Symetrie

Ukážeme si na základe zistených skutočností, koľko rôznych symetrií má polená hyperkocka, t.j. koľko existuje automorfizmov grafu polenej hyperkocky (izomorfizmov z E_n do E_n).

Definícia 2.19. Nech X a Y sú ľubovoľné množiny. Nech φ je zobrazenie z X do Y. Nech $Z \subseteq X$. Potom pod $\varphi(Z)$ budeme rozumieť množinu definovanú ako:

$$\varphi(Z) = \{\ y \mid \varphi(x) = y,\ x \in Z\ \}$$

Lema 2.20. *Nech G a H sú ľubovoľné izomorfné grafy. Nech φ je izomorfizmus medzi G a H. Nech X je ľubovoľná podmnožina $V(G)$, t.j. $X \subseteq V(G)$. Potom platí:*

$$\varphi(N_G(X)) = N_H(\varphi(X))$$

Dôkaz. Najprv dokážeme, že $\varphi(N_G(X)) \subseteq N_H(\varphi(X))$. Nech $\gamma' \in \varphi(N_G(X))$. Potom existuje $\gamma \in N_G(X)$ také, že $\gamma' = \varphi(\gamma)$. Potom pre každé $\alpha \in X$ platí $(\gamma, \alpha) \in E(G)$. Keďže φ je izomorfizmus, dostávame z toho, že pre každé $\alpha \in X$ platí $(\varphi(\gamma), \varphi(\alpha)) \in E(H)$. Z toho vyplýva, že $\varphi(\gamma) \in N_H(\varphi(X))$, čiže $\gamma' \in N_H(\varphi(X))$, a teda platí, že $\varphi(N_G(X)) \subseteq N_H(\varphi(X))$.

Ďalej dokážeme, že $\varphi(N_G(X)) \supseteq N_H(\varphi(X))$. Keďže φ je izomorfizmus, potom je zrejmé, že aj φ^{-1} je izomorfizmus z H do G (stačí preveriť definíciu). Nech $Y = \varphi(X)$. Potom môžeme použiť prvú časť dôkazu a dostávame, že $\varphi^{-1}(N_H(Y)) \subseteq N_G(\varphi^{-1}(Y))$. Z čoho už priamo vyplýva, že $N_H(\varphi(X)) \subseteq \varphi(N_G(X))$.

Spojením oboch prípadov dostávame hľadané tvrdenie. □

Definícia 2.21. Nech $\alpha \in V(E_n)$. Potom symbolom φ_α budeme označovať zobrazenie z K_{n+1} do ${}^{(3)}_{\alpha}E^{(*^n)}_{n}$ definované v dôkaze lemy 2.13.

Definícia 2.22. Nech $\alpha, \alpha' \in V(E_n)$ a ψ je ľubovoľná permutácia vrcholov grafu K_{n+1}. Potom zobrazenie $\varphi_{\alpha,\alpha',\psi}$ z $V({}^{(3)}_{\alpha}E^{(*^n)}_{n})$ do $V({}^{(3)}_{\alpha'}E^{(*^n)}_{n})$ definujeme nasledovne:

$$\varphi_{\alpha,\alpha',\psi}(\gamma) = \varphi_{\alpha'} \circ \psi \circ \varphi_{\alpha}^{-1}(\gamma)$$

Lema 2.23. *Nech $n \geq 2$. Nech $\alpha, \alpha', \alpha'' \in V(E_n)$ a ψ', ψ'' sú ľubovoľné permutácie vrcholov grafu K_{n+1}. Potom platí:*

$$(\alpha', \psi') \neq (\alpha'', \psi'') \iff \varphi_{\alpha,\alpha',\psi'} \neq \varphi_{\alpha,\alpha'',\psi''}$$

Dôkaz. Ak $\alpha' \neq \alpha''$, tak zrejme platí, že $V({}^{(3)}_{\alpha'}E_n^{(*^n)}) \neq V({}^{(3)}_{\alpha''}E_n^{(*^n)})$, a teda aj $\varphi_{\alpha'} \neq \varphi_{\alpha''}$. Z toho vyplýva, že musí platiť $\varphi_{\alpha,\alpha',\psi'} \neq \varphi_{\alpha,\alpha'',\psi''}$. Ak $\alpha' = \alpha''$ a $\psi' \neq \psi''$, potom $\psi' \circ \varphi_\alpha^{-1} \neq \psi'' \circ \varphi_\alpha^{-1}$, a teda $\varphi_{\alpha,\alpha',\psi'} = \varphi_{\alpha'} \circ \psi' \circ \varphi_\alpha \neq \varphi_{\alpha'} \circ \psi'' \circ \varphi_\alpha = \varphi_{\alpha,\alpha'',\psi''}$, lebo $\varphi_{\alpha'} = \varphi_{\alpha''}$. Ak $(\alpha', \psi') = (\alpha'', \psi'')$, potom už zrejme aj $\varphi_{\alpha,\alpha',\psi'} = \varphi_{\alpha,\alpha'',\psi''}$. □

Lema 2.24. *Nech α je ľubovoľný vektor z $V(E_n)$. Nech $\varphi, \varphi' \in \Gamma(E_n)$ sú také dva automorfizmy E_n, že pre každé $\gamma \in V({}^{(3)}_{\alpha}E_n^{(*^n)})$ platí, že $\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma)$. Potom pre všetky $\gamma \in V(E_n)$ platí, $\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma)$.*

Dôkaz. Vykonáme úplnou indukciou vzhľadom na hammingovu vzdialenosť vektora γ od α, t.j. $k = |\gamma - \alpha|$. Ak $k = 0$, resp. $k = 1$ tak je tvrdenie splnené, pretože ak $|\gamma - \alpha| \leq 1$, tak $\gamma \in V({}^{(3)}_{\alpha}E_n^{(*^n)})$, a teda $\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma)$.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky γ také, že $|\gamma - \alpha| \leq k$. Nech $|\gamma - \alpha| = k+1$. Uvažujme vrcholy $\gamma' = \gamma + e_{k_1}$, $\gamma'' = \gamma + e_{k_2}$, $\gamma''' = \gamma + e_{k_1} + e_{k_2}$ také, že platí $|\gamma' - \alpha| = |\gamma'' - \alpha| = k$ a $|\gamma''' - \alpha| = k - 1$. Uvažujme množinu $N_{E_n}(\gamma', \gamma'', \gamma''')$. Z dôkazu lemy 2.16 je vidieť, že ak $\gamma' + e_{k_3} \in N_{E_n}(\gamma', \gamma'', \gamma''')$, tak $k_3 = k_1$, podobne ak $\gamma' + e_{k_3} \in N_H(\gamma', \gamma'', \gamma''')$, tak $k_3 = k_2$. Ďalej je zrejmé, že $\gamma''' + e_{k_3} \in N_H(\gamma', \gamma'', \gamma''')$, ak $k_3 \neq k_1, k_3 \neq k_2$.

Z toho dostávame, že

$$N_H(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \{\gamma\} \cup \{\gamma''' + e_{k_3} \mid k_3 \neq k_2, k_3 \neq k_1\}$$

Potom podľa lemy 2.20 platí, že $\varphi(N_H(\gamma', \gamma'', \gamma''')) = N_H(\varphi(\gamma'), \varphi(\gamma''), \varphi(\gamma'''))$ a $\varphi'(N_H(\gamma', \gamma'', \gamma''')) = N_H(\varphi'(\gamma'), \varphi'(\gamma''), \varphi'(\gamma'''))$. Z indukčného predpokladu vyplýva, že platí $\varphi(\gamma') = \varphi'(\gamma')$, $\varphi(\gamma'') = \varphi'(\gamma'')$ a $\varphi(\gamma''') = \varphi'(\gamma''')$. Z toho vyplýva, že $\varphi(N_H(\gamma', \gamma'', \gamma''')) = \varphi'(N_H(\gamma', \gamma'', \gamma'''))$. Keďže vieme, aké prvky obsahuje množina $N_H(\gamma', \gamma'', \gamma''')$, môžeme písať, že

$$\{\varphi(\gamma)\} \cup \{\varphi(\gamma''' + e_{k_3})\} = \{\varphi'(\gamma)\} \cup \{\varphi'(\gamma''' + e_{k_3})\}$$

Keďže $|\gamma''' - \alpha| = k - 1$, tak $|\gamma''' + e_{k_3} - \alpha| \leq k$. Môžeme teda použiť indukčný predpoklad a dostávame, že $\varphi(\gamma''' + e_{k_3}) = \varphi'(\gamma''' + e_{k_3})$. Keďže φ a φ' sú bijekcie, zrejme $\varphi(\gamma''' + e_{k_3}) \neq \varphi(\gamma)$ a taktiež $\varphi'(\gamma''' + e_{k_3}) \neq \varphi'(\gamma)$. Môžeme teda odobrať rovnaké prvky z ľavej aj z pravej strany uvedenej množinovej identity a dostávame, že $\{\varphi(\gamma)\} = \{\varphi'(\gamma)\}$ a teda $\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma)$, čo sme chceli dokázať. □

Lema 2.25. *Nech $\alpha, \alpha' \in V(E_n)$, nech ψ je ľubovoľná permutácia $V(K_{n+1})$. Potom existuje zobrazenie φ, automorfizmus E_n taký, že pre každé $\gamma \in {}^{(3)}_{\alpha}E_n^{(*^n)}$ platí, že $\varphi(\gamma) = \varphi_{\alpha,\alpha',\psi}(\gamma)$.*

Dôkaz. Keďže platí, že $\varphi(\gamma) = \varphi_{\alpha,\alpha',\psi}(\gamma)$ pre všetky $\gamma \in \overset{(3)}{\underset{\alpha}{}}E_n^{(*^n)}$, to znamená, že $\varphi(\gamma) = \varphi_\alpha \circ \psi \circ \varphi_{\alpha'}^{-1}(\gamma)$. Bez ohľadu na všeobecnosť môžeme predpokladať, že $\varphi_\alpha(0) = \alpha$ a $\varphi_\alpha(k) = \alpha + e_k$. Analogicky aj $\varphi_{\alpha'}(0) = \alpha'$ a $\varphi_{\alpha'}(k) = \alpha' + e_k$. Z toho vieme usúdiť, že buď $\varphi(\alpha) = \alpha'$ a $\varphi(\alpha + e_k) = \alpha' + e_{\psi(k)}$ alebo existuje l také, že $\varphi(\alpha + e_l) = \alpha'$, $\varphi(\alpha) = \alpha' + e_{\psi(0)}$ a $\varphi(\alpha + e_k) = \alpha' + e_{\psi(k)}$ pre $k \neq l$. Tieto dve možnosti budeme v ďalšom samostatne zohľadňovať.

Definujme $\varphi(\gamma)$ pre $\gamma \notin \overset{(3)}{\underset{\alpha}{}}E_n^{(*^n)}$ nasledovne:

$$\varphi(\gamma + e_{k_1} + e_{k_2}) = \varphi(\gamma + e_{k_1}) + \varphi(\gamma + e_{k_2}) - \varphi(\gamma)$$

Overíme, že takto definované φ je izomorfizmom. Najprv však ukážeme, že

$$\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma + e_k) = \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha + e_k)$$

Dokážeme indukciou na vzdialenosť $|\gamma - \alpha|$. Ak $|\gamma - \alpha| = 0$, tak to platí, lebo $\gamma = \alpha$. Predpokladajme, že uvedené tvrdenie platí pre všetky γ, pre ktoré platí, že $|\gamma - \alpha| \leq i$. Nech $|\gamma - \alpha| = i + 1$. Potom existuje k' také, že $|\gamma - e_{k'} - \alpha| = i$. Potom $|\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma + e_k)| = |\varphi(\gamma - e_{k'} + e_{k'}) - \varphi(\gamma - e_{k'} + e_{k'} + e_k)|$. Využijeme definíciu φ a dostávame $|\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma + e_k)| = |\varphi(\gamma - e_{k'}) - \varphi(\gamma - e_{k'} + e_k)|$. Použitím indukčného predpokladu pre $\gamma - e_{k'}$ dostávame hľadané tvrdenie.

Ďalej potrebujeme ukázať, že

$$k + (k \bmod 2) \geq |\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma + \sum_{j=1}^{k} e_{i_j})| \geq k - 1 + (k \bmod 2)$$

Nech $I = \{\ i_j \mid j \in \{1, \ldots, k\}\ \}$. Prepíšeme ľavú stranu nerovnosti a použijeme predchádzajúcu identitu: $|\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma + \sum_{j=1}^{k} e_{i_j})| = |\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma + e_{i_1}) + \varphi(\gamma + e_{i_1}) - \varphi(\gamma + e_{i_2}) + \ldots + \varphi(\gamma + \sum_{j=1}^{k-1} e_{i_j}) - \varphi(\gamma + \sum_{j=1}^{k-1} e_{i_j} + e_{i_k})| = |\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha + e_{i_1}) + \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha + e_{i_2}) + \ldots + \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha + e_{i_k})| = |\sum_{j=1}^{k}(\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha + e_{i_j}))|$.

Teraz uvažujme dva prípady určenia φ definované vyššie. Ak $\varphi(\alpha) = \alpha'$, potom $|\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma + \sum_{j=1}^{k} e_{i_j})| = |\sum_{j=1}^{k}(\alpha' - \alpha' - e_{\psi(i_j)})| = |\sum_{j=1}^{k} e_{\psi(i_j)}| = k$.

Ak $\varphi(\alpha + e_l) = \alpha'$ a $\varphi(\alpha) = \alpha' + e_{\psi(0)}$, predpokladajme najprv, že $l \notin I$ potom $|\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma + \sum_{j=1}^{k} e_{i_j})| = |\sum_{j=1}^{k}(\alpha' + e_{\psi(0)} - \alpha' + e_{\psi(i_j)}| = |(k \bmod 2)e_{\psi(0)} + \sum_{j=1}^{k} e_{\psi(i_j)}| = k + (k \bmod 2)$. Naopak ak $l \in I$, potom $|\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma + \sum_{j=1}^{k} e_{i_j})| = |e_{\psi(0)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{k}(e_{\psi(0)} + e_{\psi(i_j)})| = k - 1 + (k \bmod 2)$.

Spojením oboch uvažovaných prípadov dostávame, že $k + (k \bmod 2) \geq |\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma + \sum_{j=1}^{k} e_{i_j})| \geq k - 1 + (k \bmod 2)$.

Na základe tohoto tvrdenia môžeme pristúpiť k dôkazu, že φ je automorfizmus na E_n:

Nech $\gamma, \gamma' \in V(E_n)$. Nech $|\gamma - \gamma'| = k$. Z predošlého tvrdnia vyplýva, že

$$k + (k \bmod 2) \geq |\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma')| \geq k - 1 + (k \bmod 2)$$

Čiže ak $(\gamma, \gamma') \in E(E_n)$, t.j. $|\gamma - \gamma'| \leq 2$, tak buď $|\gamma - \gamma'| = 1$, potom $2 \geq |\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma')| \geq 1$ alebo $|\gamma - \gamma'| = 2$ a potom $2 \geq |\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma')| \geq 1$.

To znamená, že $(\varphi(\gamma), \varphi(\gamma')) \in E(E_n)$. Ak $|\gamma - \gamma'| > 2$, potom analogicky $|\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma')| > 2$. Čiže ak $(\gamma, \gamma') \notin E(E_n)$, tak $(\varphi(\gamma), \varphi(\gamma')) \notin E(E_n)$.

Tým sme dokázali, že φ zachováva hrany. Stačí už len ukázať, že je bijektívne. Nech $\gamma \neq \gamma'$. Potom $|\gamma - \gamma'| \geq 1$. Podľa predchádzajúcich úvah potom platí, že $|\varphi(\gamma) - \varphi(\gamma)| \geq 1$, čiže $\varphi(\gamma) \neq \varphi(\gamma')$. Tým sme dokázali, že φ je injektívne, a keďže φ je zobrazením nad konečnou množinou, musí byť aj surjektívne, teda je bijektívne.

Z toho vyplýva, že φ je hľadaný automorfizmus, čo sme chceli dokázať. □

Ešte pred vyslovením hlavnej vety je vhodné uviesť niektoré potrebné fakty. Nech G je ľubovoľný graf. Nech $S(G)$ je množina všetkých permutácií množiny vrcholov grafu G. Vieme, že $S(G)$ tvorí grupu vzhľadom na operáciu skladania. Nech $\Gamma(G) \subseteq S(G)$ je množina všetkých automorfizmov grafu G. Potom vieme, že $\Gamma(G)$ tvorí podgrupu $S(G)$ a z Lagrangeovej vety dostávame, že $|\Gamma(G)|$ delí $|S(G)|$, t.j. počet tried rozkladu $S(G)/_{\Gamma(G)}$ je rovný $\frac{|S(G)|}{|\Gamma(G)|}$. Každá trieda rozkladu je určená ako $\varphi \circ \Gamma(G)$, kde φ je ľubovoľný prvok z $S(G)$.

Ak uvažujeme kompletný graf na 2^m vrcholoch, tak ten určite obsahuje ako podgraf polenú hyperkocku E_m rozmeru m. Ak berieme v úvahu len podmnožiny vrcholov kompletného grafu a podgraf je vrcholovo indukovaný, tak vieme určiť tento podgraf jednoznačne. Ak však berieme v úvahu podmnožiny hrán, tak sa skoro ukáže, že podgrafov izomorfných s polenou hyperkockou bude mať kompletný graf viacero. Presnejšie vieme, že ak vezmeme ľubovoľnú permutáciu φ vrcholov polenej hyperkocky, tak každá permutácia $\varphi \circ \Gamma(E_m)$ definuje rovnaký podgraf ako φ, čiže rôznych podgrafov bude len toľko, koľko je tried $S(E_m)/_{\Gamma(E_m)}$. Vieme, že $|S(E_m)| = V(E_m)! = (2^m)!$. Na určenie počtu tried potrebujeme ešte poznať počet automorfizmov grafu E_m. To nám určí nasledujúca veta.

Veta 2.26. *Nech $n \in \mathbb{N}$. Počet symetrií polenej hyperkocky E_n je práve*

$$|\Gamma(E_n)| = 2^{n+[n=3]-[n=1]}(n+1)!$$

Dôkaz. Nech $\varphi \in \Gamma(E_n)$. Nech $\alpha \in V(E_n)$. Uvažujme podgraf ${}^{(3)}_{\alpha}E_n^{(*^n)}$. Keďže φ je automorfizmus, tak obraz ľubovoľného podgrafu musí byť izomorfný s daným podgrafom. Z lemy 2.13 vieme, že ${}^{(3)}_{\alpha}E_n^{(*^n)} \cong K_{n+1}$. Označme H obraz podgrafu ${}^{(3)}_{\alpha}E_n^{(*^n)}$ v zobrazení φ, t.j. vieme, že platí $V(H) = \{\ \varphi(\gamma) \mid \gamma \in V({}^{(3)}_{\alpha}E_n^{(*^n)})\ \}$. Zo spomenutej vlastnosti φ vieme, že $H \cong {}^{(3)}_{\alpha}E_n^{(*^n)}$, čiže aj $H \cong K_{n+1}$. Ak $n \neq 3$, tak na základe vety 2.18 ďalej platí, že existuje α', β také, že $H = {}^{(3)}_{\alpha'}E_n^{\beta}$. Keďže však musí platiť, že $\#_*(\beta) = n$, tak $\beta = (*^n)$.

Nech φ_H je izomorfizmus zo vzťahu $H \cong {}^{(3)}_{\alpha}E_n^{(*^n)}$. Potom pre $\gamma \in {}^{(3)}_{\alpha}E_n^{(*^n)}$, vidieť, že $\varphi(\gamma) = \varphi_H(\gamma)$. Nech ψ je permutácia vrholov grafu K_{n+1} taká, že $\psi = \varphi_{\alpha'}^{-1} \circ \varphi_H \circ \varphi_\alpha$. Potom platí, že $\varphi(\gamma) = \varphi_{\alpha,\alpha',\psi}(\gamma)$. To je však zrejmé, lebo $\varphi(\gamma) = \varphi_H(\gamma) = \varphi_{\alpha'} \circ (\varphi_{\alpha'}^{-1} \circ \varphi_H \circ \varphi_\alpha) \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{\alpha,\alpha',\psi}$.

Môžeme použiť lemu 2.25 pre $\varphi_{\alpha,\alpha',\psi}$ a dostávame, že existuje automorfizmus φ' taký, že pre vektory $\gamma \in {}^{(3)}_{\alpha}E_n^{(*^n)}$, platí $\varphi'(\gamma) = \varphi_{\alpha,\alpha',\psi}(\gamma)$. Z predošlého odstavca ale vieme, že $\varphi_{\alpha,\alpha',\psi}(\gamma) = \varphi(\gamma)$, čiže aj $\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma)$. Na základe toho môžeme použiť lemu 2.24 a dostávame, že pre každé $\gamma \in V(E_n)$, platí $\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma)$, t.j. $\varphi = \varphi'$.

Z toho vyplýva, že ak si fixujeme α, dá sa k ľubovoľnému automorfizmu jednoznačne priradiť α' a ψ. A naopak ak zoberieme ľubovoľné α', ψ, tak vieme jednoznačne určiť automorfizmus. Z lemy 2.23 dostávame, že ak $n \geq 2$, tak množina dvojíc (α', ψ) má práve toľko prvkov, koľko je spôsobov výberu $\alpha' \in V(E_n)$ a ψ nezávisle. Z uvedeného vzťahu jednoznačnosti medzi množinou dvojíc (α', ψ) a množinou automorfizmov $\Gamma(E_n)$ vyplýva, že

$$|\Gamma(E_n)| = |\{\ (\alpha', \psi) \mid \alpha' \in V(E_n)\ \}| = 2^n(n+1)!$$

keďže počet prvkov v $V(E_n)$ je 2^n a počet permutácií $n+1$ prvkovej množiny je $(n+1)!$.

Ostáva nám rozobrať špeciálne prípady. Ak $n = 3$, potom $n+1 = 4$ a z vety 2.18 vyplýva, že $H = {}^{(3)}_{\alpha'}E_n^{(*^n)}$ alebo $H = {}^{(1)}E_2^{\beta}$, alebo $H = {}^{(2)}_{i}E_3^{\beta'}$. Keďže však E_3 sa líši od kompletného grafu K_8 len tým, že neobsahuje 4 navzájom nesusedné hrany, tak počet symetrií vieme vypočítať aj inak a ľahko sa môžeme presvedčiť, že $|\Gamma(E_3)| = \frac{8!}{\frac{1}{4!}\frac{8!}{2!2!2!2!}} = 384 = 2^4 4! = 2^{n+1}(n+1)!$.

Ak $n = 1$, potom platí, že $E_1 = K_2$, a teda počet symetrií môžeme počítať ako: $|\Gamma(E_1)| = 2 = 2^{1-1}2! = 2^{n-1}(n+1)!$.

Tým sme úplne dokázali uvedené tvrdenie. $\square$

2.5 Počty podkociek

Ostáva nám ešte určiť počty jednotlivých podkociek podľa prípadov. Na ďalšie použitie si zadefinujeme množiny uvažovaných podkociek a popíšeme ich veľkosť.

Definícia 2.27. Nech $m, n \in \mathbb{N}$; $m \leq n$. Množinou ${}^{(1)}E_m$, resp. ${}^{(2)}E_m$, resp. ${}^{(3)}E_m$, resp. ${}^{(4)}E_m$ budeme rozumieť množinu všetkých podgrafov ${}^{(1)}E_m^{\beta}$, resp. ${}^{(2)}_{i}E_m^{\beta}$, resp. ${}^{(3)}_{\alpha}E_m^{\beta}$, resp. ${}^{(4)}_{\alpha}E_m^{\beta}$ pre ľubovoľné $\beta \in \{0,1,*\}^n$ také, že $\#_*(\beta)$, $i \in \{0,1\}$, resp. $\alpha \in V({}^{(1)}E_m^{\beta})$, t.j.

$$^{(1)}E_m = \{\ {}^{(1)}E_m^{\beta} \mid \beta \in \{0,1,*\}^n\ \}$$

$$^{(2)}E_m = \{\ {}^{(2)}_{i}E_m^{\beta} \mid \beta \in \{0,1,*\}^n,\ i \in \{0,1\}\ \}$$

$$^{(3)}E_m = \{\ {}^{(3)}_{\alpha}E_m^{\beta} \mid \beta \in \{0,1,*\}^n,\ \alpha \in V({}^{(1)}E_m^{\beta})\ \}$$

$$^{(4)}E_m = \{\ {}^{(4)}_{\alpha}E_m^{\beta} \mid \beta \in \{0,1,*\}^n,\ \alpha \in V({}^{(1)}E_m^{\beta})\ \}$$

Lema 2.28. *Nech $m, n \in \mathbb{N}$; $m \leq n$. Počet prvkov množiny ${}^{(1)}E_m$, resp. ${}^{(2)}E_m$, resp. ${}^{(3)}E_m$, resp. ${}^{(4)}E_m$ je rovný:*

$$|{}^{(1)}E_m| = 2^{n-m}\binom{n}{m} \quad |{}^{(2)}E_m| = 2^{n+1-m}\binom{n}{m} \quad |{}^{(3)}E_m| = |{}^{(4)}E_m| = 2^n\binom{n}{m}$$

Dôkaz. Z definície 2.27 vidieť, že počet prvkov jednotlivých uvažovaných množín bude rovný počtu možných parametrov ich prvkov, t.j. počtu rôznych β, resp. i, resp. α.

Uvažujme $\beta \in \{0, 1, *\}^n$ také, že $\#_*(\beta) = m$. Potom je zrejmé, že takýchto vektorov môžeme vybrať práve $2^{n-m}\binom{n}{m}$, pretože výber vykonáme výberom pozícií $*$, tie môžeme vybrať $\binom{n}{m}$ spôsobmi a doplnením ostatných súradníc ľubovoľnými hodnotami z $\{0, 1\}$, t.j. ich výber vykonáme 2^{n-m} spôsobmi. Spolu dostávame uvažované $2^{n-m}\binom{n}{m}$. Formálne sa to ukáže v ďalšej kapitole. Z toho teda dostávame, že $|{}^{(1)}E_m| = 2^{n-m}\binom{n}{m}$.

Ak uvažujeme grafy ${}^{(2)}_{\ i}E^{\beta}_m$ pre ľubovoľné i, nahliadnutím do definície 2.9 si stačí uvedomiť, že každý podgraf ${}^{(1)}E^{\beta}_m$ obsahuje práve dve podkocky druhého typu, a to ${}^{(2)}_{\ 0}E^{\beta}_m$ a ${}^{(2)}_{\ 1}E^{\beta}_m$. Na základe toho môžeme počet podkociek tohoto typu vyjadriť ako $|{}^{(2)}E_m| = 2 \times |{}^{(1)}E_m| = 2 \times 2^{n-m}\binom{n}{m} = 2^{n+1-m}\binom{n}{m}$.

Ak uvažujeme grafy ${}^{(3)}_{\ \alpha}E^{\beta}_m$, tak naviac platí, že $\alpha \in V({}^{(1)}E^{\beta}_m)$. Podľa lemy 2.7 vieme, že ${}^{(1)}E^{\beta}_m \cong E_m$, t.j. môžeme tvrdiť, že $|V({}^{(1)}E^{\beta}_m)| = |V(E_m)| = 2^m$. Na základe definície 2.11 potom vieme, že každá podkocka ${}^{(1)}E^{\beta}_m$ obsahuje práve 2^m podgrafov ${}^{(3)}_{\ \alpha}E^{\beta}_m$, t.j. pre každé α. Z toho vyplýva, že počet týchto podgrafov môžeme vypočítať ako $|{}^{(3)}E_m| = 2^m|{}^{(1)}E_m| = 2^m 2^{n-m}\binom{n}{m} = 2^n\binom{n}{m}$. Rovnako aj v prípade grafov ${}^{(4)}_{\ \alpha}E^{\beta}_m$ môžeme ich počet vyjadriť ako $|{}^{(4)}E_m| = 2^n\binom{n}{m}$. □

Veta 2.29. *Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Počet podgrafov polenej hyperkocky E_n vrcholovo indukovaných izomorfných s polenou hyperkockou E_m je rovný*

$$S_{n,m} = 2^{n-m}\left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m\binom{n+1}{2^m}\right]$$

Dôkaz. Na základe liem 2.7, 2.10, 2.13 a 2.14 vieme, že $E_m \cong {}^{(1)}E^{\beta}_m$, $E_m \cong {}^{(2)}_{\ i}E^{\beta}_{m+1}$, $K_{2^m} \cong {}^{(3)}_{\ \alpha}E^{\beta}_{2^m-1}$ a $K_{2^m} \cong {}^{(4)}_{\ \alpha}E^{\beta}_{2^m}$. Ak uvažujeme vrcholovo indukované podgrafy, to znamená, že určením vrcholov určíme aj hrany, t.j. podgrafy sa považujú za rovnaké, keď majú rovnakú množinu vrcholov. To znamená, že z toho, že $|V(K_{2^m})| = |V(E_m)|$ a z faktu, že každý graf je podgrafom kompletného grafu na jeho množine vrcholov, budeme považovať každý podgraf E_n izomorfný s K_{2^m} za práve jednu polenú hyperkocku.

Na základe toho môžeme povedať, že

$$S_{n,m} = |{}^{(1)}E_m| + |{}^{(2)}E_{m+1}| + |{}^{(3)}E_{2^m-1}| + |{}^{(4)}E_{2^m}|$$

Na základe lemy 2.28 vieme potom tento vzťah písať ako

$$\begin{aligned} S_{n,m} &= 2^{n-m}\binom{n}{m} + 2^{n+1-(m+1)}\binom{n}{m+1} + 2^n\binom{n}{2^m-1} + 2^n\binom{n}{2^m} \\ &= 2^{n-m}\left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m\binom{n+1}{2^m}\right] \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať. □

Veta 2.30. *Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Počet podgrafov polenej hyperkocky E_n hranovo indukovaných izomorfných s polenou hyperkockou E_m je rovný*

$$S^{(h)}_{n,m} = 2^{n-m}\binom{n+1}{m+1}\left[1 + \frac{(n-m)!}{2^{[m=3]-[m=1]}(n-2^m+1)!}\right]$$

Dôkaz. Z dôkazu predošlej vety vieme, že počet vrcholovo indukovaných podkociek je rovný $2^{n-m}\left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m\binom{n+1}{2^m}\right]$. Z dôkazov liem 2.7, 2.10 vieme, že podgrafy prvého a druhého typu obsahujú len hrany, ktoré patria príslušnej polenej hyperkocke, t.j. ľubovoľný výber vrcholov z $V(E_n)$ totožný s jedným z podgrafov prvého resp. druhého typu odpovedá práve jednému výberu hrán z $E(E_n)$ totožnému s množinou hrán tohoto podgrafu. Avšak na základe liem 2.13 a 2.14 toto neplatí o podgrafoch tretieho, resp. štvrtého typu. Tie totiž obsahujú hrany medzi všetkými vrcholmi. Bude nás teda zaujímať, ktoré výbery hrán príslušných kompletných podgrafov budú obsahovať polenú hyperkocku.

Ak uvažujeme graf polenej hyperkocky E_m, tak vieme tento graf zakresliť do kompletného grafu na jeho množine vrcholov prostým doplnením hrán medzi všetkými vrcholmi. Očíslujme si ľubovoľne, ale pevne všetky vrcholy grafu E_m. Ak zpermutujeme množinu jeho vrcholov a ňou aj príslušnú množinu hrán, dostaneme graf s rovnakou množinou vrcholov, ale s potenciálne inou množinou hrán. Keďže uvažujeme hranovo indukované podgrafy, budeme považovať ľubovoľné dva podgrafy za totožné, ak budú mať totožné množiny vrcholov aj hrán. Bude nás teda zaujímať, ktoré permutácie vrcholovej množiny budú indukovať zhodné množiny hrán a ktoré budú indukovať rôzne. Vieme, že permutácie vrcholov grafu E_m (označme $S(E_m)$) tvoria grupu vzhľadom na skladanie. Vieme taktiež, že podmnožina týchto permutácií, ktoré zachovávajú množinu hrán (označme $\Gamma(E_m)$), tvorí podgrupu. Čiže ak budeme poznať počet prvkov grupy $\Gamma(E_m)$, vieme určiť aj počet rôznych permutácií vrcholov, ktoré indukujú rôzne množiny hrán. Na základe poznámky pred vetou 2.26 potom vieme, že počet týchto permutácií bude $\frac{|S(E_m)|}{|\Gamma(E_m)|}$. Keďže vieme, že $V(E_m) = 2^m$, tak vieme aj, že $|S(E_m)| = (2^m)!$. Na základe vety 2.26 vieme tiež, že $|\Gamma(E_m)| = 2^{m-[m=1]+[m=3]}(m+1)!$. Zhrnutím tejto úvahy dostávame, že každý podgraf E_m izomorfný s kompletným grafom K_{2^m} určuje práve

$$\frac{(2^m)!}{2^{m-[m=1]+[m=3]}(m+1)!}$$

rôznych hranovo indukovaných podgrafov izomorfných s E_m.

Na základe dôkazu predošlej vety a vyššie uvedenej úvahy dostávame, že počet podgrafov E_n hranovo indukovaných izomorfných s E_m je

$$S^{(h)}_{n,m} = |^{(1)}E_m| + |^{(2)}E_{m+1}| + \left(|^{(3)}E_{2^m-1}| + |^{(4)}E_{2^m}|\right)\frac{(2^m)!}{2^{m-[m=1]+[m=3]}(m+1)!}$$

Použijeme lemu 2.28 a dostávame:

$$S^{(h)}_{n,m} = 2^{n-m}\left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m\binom{n+1}{2^m}\frac{(2^m)!}{2^{m+[m=3]-[m=1]}(m+1)!}\right] =$$

$$= 2^{n-m}\left[\binom{n+1}{m+1} + \frac{(n+1)!}{(2^m)!(n-2^m+1)!}\frac{(2^m)!}{2^{[m=3]-[m=1]}(m+1)!}\frac{(n-m)!}{(n-m)!}\right] =$$

$$= 2^{n-m}\binom{n+1}{m+1}\left[1 + \frac{(n-m)!}{2^{[m=3]-[m=1]}(n-2^m+1)!}\right]$$

□

2.6 Úplnosť typov podštruktúr

Na záver dokážeme, že jediné podgrafy polenej hyperkocky E_n izomorfné s polenou hyperkockou rozmeru m sú iba tie, ktoré boli bližšie popísané v tejto kapitole.

Lema 2.31. *Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $\alpha, \alpha' \in V(E_n)$ také, že $|\alpha - \alpha'| = 3$, t.j. existujú l, l', l'' také, že $\alpha' = \alpha + e_l + e_{l'} + e_{l''}$. Potom*

$$N_{E_n}(\gamma + e_l, \gamma + e_{l'}, \gamma + e_{l''}, \gamma' + e_l, \gamma' + e_{l'}, \gamma' + e_{l''}) = \{\gamma, \gamma'\}$$

Dôkaz. Je zrejmé, že platí $N_{E_n}(\gamma + e_l, \gamma + e_{l'}, \gamma + e_{l''}, \gamma' + e_l, \gamma' + e_{l'}, \gamma' + e_{l''}) = N_{E_n}(\gamma + e_l, \gamma + e_{l'}, \gamma + e_{l''}) \cap N_{E_n}(\gamma' + e_l, \gamma' + e_{l'}, \gamma' + e_{l''})$. Ľahko sa presvedčíme, že $N_{E_n}(\gamma + e_l, \gamma + e_{l'}, \gamma + e_{l''}) = \{\gamma, \gamma'\} \cup \{\gamma + e_k \mid k \neq l, k \neq l', k \neq l''\}$. Rovnako aj $N_{E_n}(\gamma' + e_l, \gamma' + e_{l'}, \gamma' + e_{l''}) = \{\gamma, \gamma'\} \cup \{\gamma' + e_k \mid k \neq l, k \neq l', k \neq l''\}$, z čoho dostávame hľadané tvrdenie. □

Lema 2.32. *Nech $m, n \in \mathbb{N}$; $m \leq n$. Nech φ, φ' sú ľubovoľné dva izomorfizmy z grafu polenej hyperkocky E_m do E_n. Nech $\alpha \in V(E_m)$. Ak pre každé γ také, že $|\gamma - \alpha| \leq 2$, platí $\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma)$, potom pre všetky $\gamma \in V(E_m)$ platí $\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma)$.*

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na vzdialenosť $|\gamma - \alpha| = k$. Nech $k \leq 2$. Potom z predpokladov lemy vyplýva, že $\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma)$.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky γ také, že $|\gamma - \alpha| \leq k$; $k \geq 2$. Nech γ je také, že $|\gamma - \alpha| = k + 1$. Nech l, l', l'' sú také, že $|\gamma + e_l + e_{l'} + e_{l''} - \alpha| = k - 2$. Keďže $|\gamma - \alpha| \geq 3$, tak také l, l', l'' musia existovať. Označme si $\gamma' = \gamma + e_l + e_{l'} + e_{l''}$.

Uvažujme množinu $X = \{\gamma + e_l, \gamma + e_{l'}, \gamma + e_{l''}, \gamma' + e_l, \gamma' + e_{l'}, \gamma' + e_{l''}\}$. Potom na základe lemy 2.31 platí, že $N_{E_m}(X) = \{\gamma, \gamma'\}$. Použitím lemy 2.20 dostávame, že platí: $\varphi(N_{E_m}(X)) = N_{E_n}(\varphi(X))$ a $\varphi'(N_{E_m}(X)) = N_{E_n}(\varphi'(X))$. Ľahko preveríme, že pre každé $\gamma'' \in X$, platí $|\gamma'' - \alpha| \leq |\gamma' - \alpha| + 2 = k$, keďže $|\gamma' - \alpha| = k - 2$. Na základe indukčného predpokladu pre $\gamma'' \in X$ potom platí, že $\varphi(\gamma'') = \varphi'(\gamma'')$. Z toho vyplýva, že $\varphi(X) = \varphi'(X)$, a teda $N_{E_n}(\varphi(X)) = N_{E_n}(\varphi'(X))$, čiže aj $\varphi(N_{E_m}(X)) = \varphi'(N_{E_m}(X))$, a potom teda

$$\{\varphi(\gamma), \varphi(\gamma')\} = \{\varphi'(\gamma), \varphi'(\gamma')\}$$

Z toho, že φ, φ' sú izomorfizmy, vieme, že sú to aj injektívne zobrazenia, a teda z toho, že $\gamma \neq \gamma'$, vyplýva, že $\varphi(\gamma) \neq \varphi(\gamma')$ a $\varphi'(\gamma) \neq \varphi'(\gamma')$. Použitím indukčného predpokladu pre γ' dostávame, že $\varphi(\gamma') = \varphi'(\gamma')$. Z oboch uvedených faktov vyplýva, že keďže platí $\{\varphi(\gamma), \varphi(\gamma')\} = \{\varphi'(\gamma), \varphi'(\gamma')\}$, potom vieme, že $\{\varphi(\gamma)\} = \{\varphi'(\gamma)\}$, a teda $\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma)$, čo sme chceli dokázať. □

Veta 2.33. *Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Nech H je ľubovoľný podgraf polenej hyperkocky E_n izomorfný s polenou hyperkockou E_m. Potom existuje $\beta \in \{0,1,*\}^n$, resp. $i \in \{0,1\}$, resp. $\hat{\alpha} \in V(E_n)$ také, že $H = {}^{(1)}E^{\beta}_{m}$ alebo $H = {}^{(2)}_{\;i}E^{\beta}_{m+1}$, alebo $H = {}^{(3)}_{\;\hat{\alpha}}E^{\beta}_{2^m-1}$, alebo $H = {}^{(4)}_{\;\hat{\alpha}}E^{\beta}_{2^m}$.*

Dôkaz. Najprv načrtneme ideu dôkazu. Pre pevne zvolený vrchol vykonáme rozbor všetkých prípadov pre obsah množiny $N_{E_n}(\varphi(\alpha))$. Potom použijeme lemu 2.32 pre φ a vhodne zvolený iný izomorfizmus. Ukázaním, že sú totožné dostaneme hľadané tvrdenie.

Najprv nech $m \leq 2$, potom $E_m = K_{2^m}$. Môžeme teda použiť vetu 2.18 a dostávame tým platnosť dokazovaného tvrdenia.

Predpokladajme, teda že $m \geq 4$ (prípadu $m = 3$ sa nebudeme špeciálne venovať, keďže sa dá preveriť aj úplným preberaním).

Vezmime ľubovoľný pevný vrchol $\alpha \in V(E_m)$. Nech φ je izomorfizmus z E_m do H. Uvažujme množinu $X = {}^{(3)}_{\;\alpha}E^{(*^m)}_{m} = \{\alpha\} \cup \{\alpha + e_k \mid k \in \{1, \ldots, m\}\}$. Z lemy 2.13 vieme, že $X \cong K_{m+1}$. Z toho, že φ je izomorfizmus naviac vieme, že $\varphi(X) \cong K_{m+1}$. Použijme vetu 2.18 pre $\varphi(X)$ a uvažujme dva prípady.

Nech $\varphi(X) = {}^{(3)}_{\;\gamma}E^{\beta}_{m}$, pre nejaké β. Nech najprv $\gamma = \varphi(\alpha)$. Potom platí, že $\varphi(X) = \{\varphi(\alpha)\} \cup \{\varphi(\alpha) + e_k \mid \beta_k = *\}$. Definujme funkciu ψ nasledovne: $\psi(k) = l \iff \varphi(\alpha + e_k) = \varphi(\alpha) + e_l$. Keďže φ je izomorfizmus, tak je to aj injektívne zobrazenie, a z toho získame, že ψ je tiež injektívne.

Uvažujme vrchol $\alpha' = \alpha + e_k + e_{k'}$ pre nejaké $k \neq k'$. Je zrejmé, že $\alpha' \in N_{E_m}(\alpha, \alpha + e_k, \alpha + e_{k'})$. Z lemy 2.20 dostávame, že $\varphi(\alpha') \in N_{E_n}(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha + e_k), \varphi(\alpha + e_{k'})) = N_{E_n}(\gamma, \gamma + e_{\psi(k)}, \gamma + e_{\psi(k')}) = \{\gamma + e_l \mid l \neq \psi(k),\ l \neq \psi(k')\} \cup \{\gamma + e_{\psi(k)} + e_{\psi(k')}\}$. Podobne uvažujme $\alpha'' = \alpha + e_k + e_{k''}$ pre $k \neq k''$, $k'' \neq k'$ a dostávame, že $\varphi(\alpha'') \in \{\gamma + e_l \mid l \neq \psi(k),\ l \neq \psi(k'')\} \cup \{\gamma + e_{\psi(k)} + e_{\psi(k'')}\}$. Predpokladajme, že $\varphi(\alpha') = \gamma + e_{\psi(k)} + e_{\psi(k')}$ a $\varphi(\alpha'') = \gamma + e_l$, kde $l \neq \psi(k)$, $l \neq \psi(k'')$. Počítajme: $|\varphi(\alpha') - \varphi(\alpha'')| = |\gamma + e_{\psi(k)} + e_{\psi(k')} - \gamma + e_l| = |e_{\psi(k)} + e_{\psi(k')} + e_l|$. Keďže $|\alpha' - \alpha''| = 2$ a φ je izomorfizmus, vyplýva z toho, že $|\varphi(\alpha') - \varphi(\alpha'')| \leq 2$. Aby bola splnená táto podmienka, musí platiť, že $l = \psi(k')$, keďže platí, že $l \neq \psi(k)$, $\psi(k) \neq \psi(k')$. Ďalej uvažujme vrchol $\alpha''' = \alpha + e_k + e_{k'''}$, kde $k \neq k'''$, $k''' \neq k'$ a $k''' \neq k''$. Z podmienky $m \geq 4$ taký vrchol musí existovať. Ak $\varphi(\alpha''') = \gamma + e_{\psi(k)} + e_{\psi(k''')}$, tak podobne ako v predošlom prípade z toho, že $|\alpha'' - \alpha'''| = 2$, musí platiť, že $l = \psi(k''')$, čo však nemôže platiť zároveň s podmienkou, že $l = \psi(k')$, lebo ψ je injektívne. Ak naopak $\varphi(\alpha''') = \gamma + e_{l'}$, kde $l' \neq \psi(k)$ a $l' \neq \psi(k''')$, potom z podmienky, že $|\alpha' - \alpha'''| = 2$, musí platiť, že $l' = \psi(k')$, z čoho potom spolu s podmienkou $l = \psi(k')$ vyplýva, že $l = l'$, a teda $\varphi(\alpha'') = \varphi(\alpha''')$, čo je však spor s injektívnosťou φ.

Z predošlého rozboru vyplýva, že buď pre všetky $k' \neq k$ platí, že $\varphi(\alpha + e_k + e_{k'}) = \gamma + e_{\psi(k)} + e_{\psi(k')}$ alebo pre všetky $k' \neq k$ platí, že $\varphi(\alpha + e_k + e_{k'}) = \gamma + e_l$, kde $l \neq \psi(k)$ a $l \neq \psi(k')$.

Nech $\varphi(\alpha + e_k + e_{k'}) = \gamma + e_{\psi(k)} + e_{\psi(k')}$. Keďže vieme, že $E_m \cong {}^{(1)}E^{\beta}_{m}$, označme odpovedajúci izomorfizmus z lemy 2.7 ako φ'. Označme $\alpha' = (\varphi')^{-1}(\gamma)$. Uvažujme zobrazenie $\varphi_{\alpha,\alpha',\psi}$ z definície 2.22, kde dodefinujeme $\psi(0) = 0$. Na základe lemy 2.25 existuje automorfizmus φ'' taký, že $\varphi''(\alpha) = \alpha'$, $\varphi''(\alpha'') = \varphi_{\alpha,\alpha',\psi}(\alpha'')$ ak $|\alpha'' - \alpha| \leq 1$ a naviac z dôkazu tejto lemy vieme, že platí $\varphi''(\alpha''+e_k+e_{k'}) = \varphi''(\alpha''+e_k)+\varphi''(\alpha''+e_{k'})-\varphi''(\alpha'')$ pre ľubovoľné α''. Uvažujme zobrazenie $\varphi''' = \varphi' \circ \varphi''$. Potom platí, že $\varphi'''(\alpha) = \varphi'(\varphi''(\alpha)) = \varphi'(\alpha') = \gamma$ a $\varphi'''(\alpha + e_k) = \varphi'(\varphi''(\alpha + e_k)) = \varphi'(\alpha' + e_{\psi(k)}) = \gamma + e_{\psi(k)}$ (viď. dôkaz lemy 2.7) a $\varphi'''(\alpha + e_k + e_{k'}) = \varphi'(\varphi''(\alpha + e_k + e_{k'})) = \varphi'(\alpha' + e_{\psi(k)} + e_{\psi(k')}) = \gamma + e_{\psi(k)} + e_{\psi(k')}$. Nakoniec použitím lemy 2.32 pre φ a φ''' dostávame, že $\varphi = \varphi'''$, a teda $H = \varphi(E_m) = \varphi'''(E_m) = {}^{(1)}E^{\beta}_m$, čiže $H = {}^{(1)}E^{\beta}_m$.

Nech naopak $\varphi(\alpha + e_k + e_{k'}) = \gamma + e_l$, kde $l \neq \psi(k)$ a $l \neq \psi(k')$. Potom pre všetky $\alpha' \in V(E_m)$ také, že $|\alpha' - \alpha| \leq 2$, platí, že $\varphi(\alpha') \in \{\gamma + e_l \mid l \in \{1, \ldots, n\}\}$. Uvažujme graf ${}^{(3)}_{\gamma}E^{\beta'}_{2^m-1}$ pre také β', že ak existuje α', $|\alpha' - \alpha| \leq 2$ také, že $\varphi(\alpha') = \gamma + e_k$, tak $\beta'_k = *$, t.j. aby $\varphi(\alpha') \in {}^{(3)}_{\gamma}E^{\beta'}_{2^m-1}$. Keďže tento graf je izomorfný s kompletným grafom na 2^m vrcholoch, môžeme si zvoliť také zobrazenie φ'' z E_m do ${}^{(3)}_{\gamma}E^{\beta'}_{2^m-1}$, že $\varphi''(\alpha') = \varphi(\alpha')$ pre $|\alpha' - \alpha| \leq 2$. Použitím lemy 2.32 pre φ a φ'' dostávame, že $\varphi = \varphi''$, a teda $H = {}^{(3)}_{\gamma}E^{\beta'}_{2^m-1}$.

Analogickým spôsobom sa dá urobiť rozbor aj pre prípad, kedy $\gamma \neq \varphi(\alpha)$, a potom platí buď $H = {}^{(1)}E^{\beta}_m$ alebo $H = {}^{(3)}_{\gamma}E^{\beta'}_{2^m-1}$ pre nejaké β'.

Nech $\varphi(X) = {}^{(4)}_{\gamma}E^{\beta}_{m+1}$ pre nejaké β. Opäť analogickým spôsobom môžeme ukázať, že buď pre všetky $k \neq k'$ platí $\varphi(\alpha + e_k + e_{k'}) = \gamma + e_{\psi(k)} + e_{\psi(k')}$, kde $\psi(k) = l' \iff \varphi(\alpha + e_k) = \gamma + e_l + e_{l'}$ a l je pevné pre všetky k, alebo pre všetky $k \neq k'$ platí $\varphi(\alpha + e_k + e_{k'}) = \gamma + e_l + e_{l'}$, kde $l \neq l'$. Potom sa dá dokázať, že v prvom prípade platí, že $H = {}^{(2)}_{i}E^{\beta}_{m+1}$, kde $i \equiv |\gamma| \pmod 2$ a v druhom prípade platí, že $H = {}^{(4)}_{\hat{\gamma}}E^{\beta'}_{2^m}$, kde $\hat{\gamma} = \gamma + e_l$ a β' je nejaké.

Spojením všetkých prípadov rozboru získavame hľadané tvrdenie. $\square$

Kapitola 3

Algebraický popis štruktúry

V nasledujúcej kapitole iným spôsobom popíšeme podštruktúru polenej hyperkocky E_n a špeciálne pomocou tohoto popisu vyčíslime veľkosť prieniku podgrafov prvého typu.

3.1 Relácie a podmnožiny

Definícia 3.1. Pod rozšíreným priestorom vrcholov $V_n^* \supseteq V_n = V(E_n)$ budeme rozumieť množinu $V_n^* = \{0, 1, *\}^n \cup \{\perp\}$. Prvkom tohoto priestoru (s výnimkou $\perp$) budeme hovoriť vektory, rovnako ako v prípade prvkov V_n. Pre vektor $\beta \in V_n^*$ budeme rozumieť symbolom β_i i-tú súradnicu tohoto vektora, t.j. $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$

Je intuitívne vidieť, že prvky V_n^* sú zvolené tak, aby reprezentovali tzv. masky vektorov, pomocou ktorých sa definovali príslušné podmnožiny vrcholov E_n. K formálnej definícii spomínaných podmnožín potrebujeme ešte špeciálne usporiadanie z nasledujúcej definície.

Definícia 3.2. Reláciou $\preccurlyeq$ na prvkoch z V_n^* rozumieme takú reláciu, ktorá spĺňa nasledovné podmienky:

(i) $(\forall \beta \in V^*)\ \ \perp \preccurlyeq \beta$

(ii) $\beta \preccurlyeq \perp \Rightarrow \beta = \perp$

(iii) $(\forall \alpha \neq \perp)(\forall \beta \neq \perp)\ \alpha \preccurlyeq \beta \iff (\forall i \in \{1, \dots n\})\ \alpha_i = \beta_i \vee \beta_i = *$

Je zrejme vidieť, že takto definovaná relácia na V_n^* je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna, t.j. jedná sa o čiastočné usporiadanie. Je taktiež vidieť, že obsahuje najmenší prvok (prvok $\perp$).

Na základe predošlého je možné vysloviť definíciu (a neskôr aj dôkaz jej korešpondencie s našou intuíciou) podkociek (vo všeobecnosti podgrafov) E_n definovaných pomocou masky β.

Definícia 3.3. Symbolom $E(\beta)$, kde $\beta \in V_n^*$, budeme označovať množinu vektorov z V_n, ktorá je "menšia" od β s ohľadom na usporiadanie $\preccurlyeq$, formálne

$$E(\beta) = \{\alpha \in V_n | \alpha \preccurlyeq \beta\}$$

Uvedenú definíciou možno demonštrovať na príklade: Nech $\beta = (0, 1, *, *, 1)$. Potom $E(\beta) = \{(0, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 1)\}$.

Podobne nech $\beta = \perp$. Potom $E(\beta) = E(\perp) = \emptyset$, pretože z podmienky (ii) v definícii $\preccurlyeq$ vyplýva, že jediným prvkom V_n^*, ktorý spĺňa podmienku $\beta \preccurlyeq \perp$ je $\beta = \perp$ a ten nepatrí V_n ($\perp \notin V_n$).

Definícia 3.4. Pre dané $\beta \in V_n^*$ definujeme hodnotu $D(\beta)$, ktorá bude určená nasledovne:

(i) $\beta = \perp \Rightarrow D(\beta) = -\infty$

(ii) $\beta \neq \perp \Rightarrow D(\beta) = |\{i | \beta_i = *\}|$

Hodnotu $D(\beta)$ pre dané β budeme nazývať rádom vektora β.

Ako je vidieť, funkcia $D(\beta)$ definuje počet $*$ vo vektore β. Z toho vyplýva, že napr. všetky vektory $\alpha \in V_n$ majú rád 0 ($D(\alpha) = 0$) a taktiež, že rád daného vektora bude určovať aj rozmer podgrafu týmto vektorom určený.

Teraz už môžeme pristúpiť k dôkazu korešpondenie $E(\beta)$ s množinou vektorov ${}^{(1)}E_m^\beta$ definovanej v predošlej kapitole.

Veta 3.5. *Pre každé $\beta \in V_n^* \wedge D(\beta) = m \wedge m \in \mathbb{N}$ platí $E(\beta) = {}^{(1)}E_m^\beta$*

Dôkaz. Ako už z definície vyplýva našou úlohou je ukázať, že

$$(\forall \alpha \in V_n)\ \alpha \preccurlyeq \beta \Longleftrightarrow \alpha \in {}^{(1)}E_m^\beta$$

Nech $\alpha \preccurlyeq \beta$, potom z definície $(\forall i \in \{1 \ldots n\})\ \alpha_i = \beta_i \vee \beta_i = *$. Množina ${}^{(1)}E_m^\beta$ je definovaná tak, že prvok $\alpha \in {}^{(1)}E_m^\beta$ vznikne nahradením všetkých symbolov $*$ prvkami z $\{0, 1\}$. Z toho zrejme pre dané α vyplýva, že buď platí $\alpha_i = \beta_i$, potom $\beta_i \neq *$, lebo $\alpha \in V_n$, alebo platí $\beta_i = *$, potom je $\alpha_i \in \{0, 1\}$. Z toho jasne vyplýva, že vektor α je na miestach, kde $\beta_i \neq *$ totožný s β a na ostatných miestach je ľubovoľný, čím je vidno, že sa dá vytvoriť z β doplnením prvkov z $\{0, 1\}$ na miesta $\beta_i = *$ a tým je ukázané, že $\alpha \in {}^{(1)}E_m^\beta$.

Naopak nech $\alpha \in {}^{(1)}E_m^\beta$. Potom sa dá vytvoriť z β doplnením prvkov z $\{0, 1\}$ na miesta, kde $\beta_i = *$. Z toho, ale vyplýva, že ak $\beta_i \neq *$, potom $\alpha_i = \beta_i$. To je ekvivalentné podmienke $\alpha_i = \beta_i \vee \beta_i = *$, pre ľubovoľné $i \in \{1 \ldots n\}$, čo sme potrebovali dokázať. $\square$

Z dôkazu je vidieť, že relácia $\preccurlyeq$ je rozšírením vzťahu medzi vektormi z V_n a "maskami", tak ako boli definované v predošlej kapitole. Toto rozšírenie charakterizuje nasledujúca veta:

Veta 3.6. *Pre ľubovoľné dva vektory $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ platí $\beta^{(1)} \preccurlyeq \beta^{(2)}$ vtedy a len vtedy, keď $E(\beta^{(1)}) \subseteq E(\beta^{(2)})$.*

Dôkaz. Nech $\beta^{(1)} \preccurlyeq \beta^{(2)}$. Vezmime ľubovoľné $\alpha \in E(\beta^{(1)})$. Potom zrejme $\alpha \preccurlyeq \beta^{(1)}$. Z tranzitivity relácie $\preccurlyeq$ potom vyplýva, že $\alpha \preccurlyeq \beta^{(2)}$, čiže $\alpha \in E(\beta^{(2)})$, t.j. platí, že $E(\beta^{(1)}) \subseteq E(\beta^{(2)})$.

Naopak nech $E(\beta^{(1)}) \subseteq E(\beta^{(2)})$. To znamená, že pre každé $\alpha \preccurlyeq \beta^{(1)}$ platí $\alpha \preccurlyeq \beta^{(2)}$. Prípad, že $\beta^{(1)} = \perp$ alebo $\beta^{(2)} = \perp$ triviálne platí. Predpokladajme, že $\beta^{(1)} \neq \perp$ a $\beta^{(2)} \neq \perp$. Predpokladajme, že $\beta^{(1)} \not\preccurlyeq \beta^{(2)}$. Potom vychádzajúc z definície existuje j také, že $\beta_j^{(1)} \neq \beta_j^{(2)} \wedge \beta_j^{(2)} \neq *$, t.j. existuje $a \in \{0,1\}$ také, že $\beta_j^{(2)} = a$. Ukážeme, že to vedie k sporu.

Predpokladajme najprv, že $\beta_j^{(1)} = b \in \{0,1\}$ a $b \neq a$, keďže $\beta_j^{(1)} \neq \beta_j^{(2)}$. Vezmime také α, že $\alpha \preccurlyeq \beta^{(1)}$. Potom podľa definície platí, že $\alpha_j = \beta_j^{(1)} \vee \beta_j^{(1)} = *$. Keďže $\beta_j^{(1)} \neq *$, musí platiť prvá z podmienok. Potom ale platí, že $\alpha_j = \beta_j^{(1)} = b \neq a = \beta_j^{(2)} \wedge \beta_j^{(2)} \neq *$, z čoho vyplýva, že $\alpha \not\preccurlyeq \beta^{(2)}$, čo je spor s predpokladom.

Predpokladajme naopak, že $\beta_j^{(1)} = *$. Podobným spôsobom vezmime vhodné $\alpha \preccurlyeq \beta^{(1)}$. Keďže $\beta_j^{(1)} = *$, platí potom, že α_j je ľubovoľné, t.j. $\alpha_j \in \{0,1\}$. Nech teda $\alpha_j = b$ také, že $b \neq a$. Potom analogicky dostávame spor, lebo platí, že $\alpha \not\preccurlyeq \beta^{(2)}$.

Na základe vykonaného rozboru môžeme usúdiť, že musí platiť, že $\beta^{(1)} \preccurlyeq \beta^{(2)}$, čo sme chceli dokázať. □

3.2 Operácia prieniku

V ďalšom budeme potrebovať realizovať nejakým spôsobom prieniky podkociek (vo všeobecnosti podgrafov) E_n pomocou nejakého algebraického aparátu. Zadefinujeme si preto binárnu operáciu $\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}$ na prvkoch $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$, ktorá by odpovedala prieniku podgrafov $E(\beta^1) \cap E(\beta^2)$.

Definícia 3.7. Čiastočnou binárnou operáciou $\cdot$ nad $\{0,1,*\}$ budeme rozumieť čiastočnú funkciu definovanú tabuľkou:

$\cdot$	0	1	$*$
0	0		0
1		1	1
$*$	0	1	$*$

Ľahko vidieť, že uvedená operácia sa dá definovať aj iným spôsobom a to nasledovne:

$$a \cdot b = c \Longleftrightarrow (a = b = c) \vee (a = * \wedge c = b) \vee (b = * \wedge c = a)$$

Z uvedeného je zrejmé, že takto definovaná operácia je asociatívna, komutatívna a má jednotkový prvok $*$. Operáciu $\cdot$ použijeme na konštrukciu operácie $\odot$, od ktorej očakávame vyššie uvedené vlastnosti.

Definícia 3.8. Binárnou operáciou $\odot$ budeme rozumieť funkciu $V_n^* \times V_n^* \to V_n^*$

definovanú nasledovne:

$$\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)} = \begin{cases} \beta^{(3)} & (\forall i \in \{1 \dots n\})\ \beta_i^{(1)} \cdot \beta_i^{(2)} = \beta_i^{(3)} \\ \perp & \textit{inak} \end{cases}$$

Nahliadnutím do predchádzajúcej definície vidieť, že vlastnosti $\cdot$ sa prenášajú aj na operáciu $\odot$, takže sa dá ukázať, že daná operácia je asociatívna, komutatívna a má aj jednotkový prvok $*^n = (*, *, \dots, *)$. Tieto a ďalšie jej vlastnosti intuitívne korešpondujú s vlastnosťami operácie $\cap$ na množinách (v našom prípade špeciálne na množinách $E(\beta)$ vektorov definovaných vektorom β). Je teda očakávateľné, že bude existovať priama korešpondencia medzi operáciami $\odot$ a $\cap$. Túto vlastnosť $\odot$ popisuje nasledujúca veta.

Veta 3.9. *Pre všetky vektory $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ platí*

$$E(\beta^{(1)}) \cap E(\beta^{(2)}) = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$$

Dôkaz. Problém si rozdelíme na dva prípady:

V prvom prípade predpokladajme, že $\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)} = \perp$. Na z definície musí existovať $j \in \{1, \dots n\}$ také, že neexistuje c také, že $\beta_j^{(1)} \cdot \beta_j^{(2)} = c$. Na základe definície operácie $\cdot$ môžeme usúdiť, že $\beta_j^{(1)} \neq \beta_j^{(2)}$ a $\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)} \in \{0, 1\}$ (viď. tabuľka operácie $\cdot$).

Nech $\alpha \in E(\beta^{(1)})$ a zároveň $\alpha \in E(\beta^{(2)})$. Potom $\alpha \preccurlyeq \beta^{(1)} \wedge \alpha \preccurlyeq \beta^{(2)}$. Z toho ale vyplýva, že $\alpha_j = \beta_j^{(1)} \vee \beta_j^{(1)} = *$ a tiež $\alpha_j = \beta_j^{(2)} \vee \beta_j^{(2)} = *$. Z predošlých predpokladov vidieť, že druhé z podmienok v disjunkciách neplatia, musí potom platiť $\alpha_j = \beta_j^{(1)} \neq \beta_j^{(2)} = \alpha_j$. Čo je spor s predpokladom, že $\alpha \in E(\beta^{(1)}) \cap E(\beta^{(2)})$. Čiže $E(\beta^{(1)}) \cap E(\beta^{(2)}) = \emptyset \subseteq E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$.

V opačnom prípade z toho, že $E(\perp) = \emptyset$ už triviálne vyplýva, že $E(\beta^{(1)}) \cap E(\beta^{(2)}) \supseteq \emptyset = E(\perp) = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$.

V druhom prípade nech $\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)} = \beta^{(3)} \neq \perp$. Potom podľa definície pre všetky i platí, že $\beta_i^{(1)} \cdot \beta_i^{(2)} = \beta_i^{(3)}$. Nech $\alpha \preccurlyeq \beta^{(1)}$ a $\alpha \preccurlyeq \beta^{(2)}$. Potom z definície pre každé i platí $(\alpha_i = \beta_i^{(1)} \vee \beta_i^{(1)} = *) \wedge (\alpha_i = \beta_i^{(2)} \vee \beta_i^{(2)} = *)$. Roznásobením a použitím definície $\cdot$ (alternatívnej) dostávame:

$$\underbrace{(\alpha_i = \beta_i^{(1)} \wedge \alpha_i = \beta_i^{(2)})}_{\beta_i^{(1)}=\beta_i^{(2)}=\beta_i^{(3)} \Rightarrow \alpha_i=\beta_i^{(3)}} \vee \underbrace{(\alpha_i = \beta_i^{(1)} \wedge \beta_i^{(2)} = *)}_{\beta_i^{(3)}=\beta_i^{(1)}=\alpha_i} \vee$$

$$\vee \underbrace{(\alpha_i = \beta_i^{(2)} \wedge \beta_i^{(1)} = *)}_{\beta_i^{(3)}=\beta_i^{(2)}=\alpha_i} \vee \underbrace{(\beta_i^{(1)} = * \wedge \beta_i^{(2)} = *)}_{\beta_i^{(3)}=*=\beta_i^{(2)}=\beta_i^{(1)}}$$

Z toho vidieť, že v ľubovoľnom prípade z vyššie uvedených platí, že $\alpha_i = \beta_i^{(3)} \vee \beta_i^{(3)} = *$. A z toho priamo vyplýva, že $\alpha \preccurlyeq \beta^{(3)}$ (viď. definícia $\preccurlyeq$), t.j. $\alpha \in E(\beta^{(3)}) = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$.

Nech naopak $\alpha \in E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$. Potom keďže $\beta_i^{(1)} \cdot \beta_i^{(2)} = \beta_i^{(3)}$, využijeme definíciu operácie $\cdot$, roznásobíme a dostávame:

$$\begin{aligned} \beta_i^{(1)} \cdot \beta_i^{(2)} = \beta_i^{(3)} &\iff (\beta_i^{(1)} = \beta_i^{(2)} = \beta_i^{(3)}) \vee (\beta_i^{(1)} = * \wedge \beta_i^{(2)} = \beta_i^{(3)}) \vee \\ &\qquad\qquad \vee (\beta_i^{(1)} = \beta_i^{(3)} \wedge \beta_i^{(2)} = *) \\ &\implies (\beta_i^{(3)} = \beta_i^{(1)} \vee \beta_i^{(1)} = *) \wedge (\beta_i^{(3)} = \beta_i^{(2)} \vee \beta_i^{(2)} = *) \end{aligned}$$

Z toho opäť použitím definície vyplýva, že $\beta^{(3)} \preccurlyeq \beta^{(1)} \wedge \beta^{(3)} \preccurlyeq \beta^{(2)}$. Na základe tranzitivity $\preccurlyeq$ a definície $E(\beta)$ potom platí, že $\alpha \in E(\beta^{(1)}) \wedge \alpha \in E(\beta^{(2)})$. A to znamená, že $\alpha \in E(\beta^{(1)}) \cap E(\beta^{(2)})$, čo bolo treba dokázať.

Spojením oboch prípadov dostávame hľadané tvrdenie. □

Dôsledok 3.10. *Pre všetky vektory $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ platí*

$$\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)} \preccurlyeq \beta^{(1)} \ \wedge \ \beta^{(1)} \odot \beta^{(2)} \preccurlyeq \beta^{(2)}$$

Dôkaz. Z vety 3.9 vyplýva, že $E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) = E(\beta^{(1)}) \cap E(\beta^{(2)}) \subseteq E(\beta^{(1)})$. Potom z vety 3.6 priamo vyplýva $\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)} \preccurlyeq \beta^{(1)}$. Analogicky aj pre prípad $\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)} \preccurlyeq \beta^{(2)}$. □

3.3 Definícia podštruktúr pomocou prieniku

V ďalšej časti si pomocou takto zadefinovaných operácií popíšeme podštruktúry E_n definované v kapitole 2.

Definícia 3.11. Symbolom $B(\alpha)$ budeme rozumieť množinu bodov sféry v priestore V_n so stredom v bode α a polomerom 1, t.j. $B(\alpha) = \{\gamma \mid |\gamma - \alpha| \leq 1\}$.

Symbolom $C(\alpha)$ budeme rozumieť množinu bodov obalu sféry v priestore V_n so stredom v bode α a polomerom 1, t.j. $C(\alpha) = \{\gamma \mid |\gamma - \alpha| = 1\}$.

Symbolom P_i budeme rozumieť množinu vektorov priestoru V_n, ktorých parita hammingovej veľkosti je práve rovná i, t.j. $P_i = \{\gamma \mid |\gamma| \equiv i \pmod 2\}$.

Na základe definícií 2.6, 2.9, 2.11, 2.12 sa dá jednoducho nahliadnuť, že platia tvrdenia v nasledujúcej leme:

Lema 3.12. *Nech $m \in \mathbb{N}$ a $\beta \in V_n^*$ také, že $D(\beta) = m$. Potom platí:*

(i) ${}^{(1)}E_m^\beta = E(\beta)$

(ii) ${}^{(2)}_{i}E_m^\beta = E(\beta) \cap P_i$, *kde* $i \in \{0, 1\}$

(iii) ${}^{(3)}_{\alpha}E_m^\beta = E(\beta) \cap B(\alpha)$, *kde* $\alpha \in E(\beta)$

(iv) ${}^{(4)}_{\alpha}E_m^\beta = E(\beta) \cap C(\alpha)$, *kde* $\alpha \in E(\beta)$

Uvedený popis hľadaných podštruktúr E_n nám umožnuje lepšie pochopiť štruktúru E_n a taktiež jednoduchým spôsobom spočítať veľkosti prienikov týchto podštruktúr. Na tento výpočet budeme potrebovať uvažovať všetky možné kombinácie typov podštruktúr a na základe toho určit počet jednotlivých dvojíc, ktoré majú prienik istej veľkosti. Pre všeobecnosť nebudeme uvažovať len podštruktúry zodpovedajúce E_m, t.j. rozmeru m, ale ľubovoľnej veľkosti. Hľadané hodnoty budú potom už len špeciálnym prípadom.

V prvom rade je potrebné určiť prieniky zodpovedajúce podštruktúram prvého typu. Tieto sú jednoznačne určené svojimi vektormi $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$. Ako bolo už v predošlom uvedené prienik takéhoto druhu podštruktúr je podštruktúra daná vektorom $\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}$. Otázkou zostáva koľko existuje rôznych dvojíc vektorov $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ a akej veľkosti sú ich prislúchajúce prieniky.

3.4 Podmnožiny a ich veľkosti

Lema 3.13. *Pre každý vektor $\beta \in V_n^*$ platí vzťah $|E(\beta)| = 2^{D(\beta)}$.*

Dôkaz. Budeme postupovať indukciou vzhľadom na $D(\beta)$. Špeciálne, ak $\beta = \perp$, potom $2^{D(\beta)} = 2^{-\infty} = 0 = |\emptyset| = |E(\beta)|$. Ak $D(\beta) = 0$, potom $\beta \in V_n$ a je zrejmé, že $E(\beta) = \{\beta\}$ (vyplýva to z definície $\preccurlyeq$). To znamená, že $2^{D(\beta)} = 2^0 = 1 = |E(\beta)|$.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky $\beta \in V_n^*$, také, že $D(\beta) \leq l$ a $l \geq 0$. Uvažujme také β, že $D(\beta) = l + 1$. Potom existuje index k taký, že $\beta_k = *$. Definujme vektory $\beta^{(0)}, \beta^{(1)}$ tak, že $\beta_i^{(0)} = \beta_i^{(1)} = \beta_i$ ak $i \neq k$ a $\beta_k^{(0)} = 0, \beta_k^{(1)} = 1$. Z uvedenej definície priamo vyplýva, že $D(\beta^{(0)}) = D(\beta^{(1)}) = D(\beta) - 1 = l$. Je zrejmé, že ak $\alpha \preccurlyeq \beta$, potom $\alpha \preccurlyeq \beta^{(0)}$ alebo $\alpha \preccurlyeq \beta^{(1)}$. Taktiež je vidieť, že $E(\beta^{(0)}) \cap E(\beta^{(1)}) = \emptyset$ (lebo daný vektor z $E(\beta)$ má k-tú súradnicu buď 0 alebo 1, lebo je vo V_n, takže môže patriť práve do jednej z uvedených množín). Z toho už vyplýva, že $|E(\beta)| = |E(\beta^{(0)})| + |E(\beta^{(1)})|$. A z indukčného predpokladu pre $\beta^{(0)}, \beta^{(1)}$ dostávame, že

$$|E(\beta)| = 2^{D(\beta^{(0)})} + 2^{D(\beta^{(1)})} = 2^{D(\beta)-1} + 2^{D(\beta)-1} = 2^{D(\beta)}$$

čo bolo treba dokázať. □

Lema 3.14. *Pre každý vektor $\beta^{(1)} \in V_n^*$ existuje práve $2^{D(\beta^{(1)})-d}\binom{D(\beta^{(1)})}{d}$ vektorov $\beta^{(2)}$ rádu d, pre ktoré platí $\beta^{(2)} \preccurlyeq \beta^{(1)}$, t.j.*

$$|E^d(\beta^{(1)})| = |\{\beta^{(2)} | D(\beta^{(2)}) = d \wedge \beta^{(2)} \preccurlyeq \beta^{(1)}\}| = 2^{D(\beta^{(1)})-d}\binom{D(\beta^{(1)})}{d}$$

Dôkaz. Budeme postupovať indukciou vzhľadom na $D(\beta^{(1)})$ pre ľubovoľné d ($d \leq D(\beta^{(1)})$). Nech $d = 0$ a $\beta^{(1)}$ je ľubovoľné, potom pre každé $\beta^{(2)}$ také, že $\beta^{(2)} \preccurlyeq \beta^{(1)}$, platí, že patrí do V_n a teda patrí do $E(\beta^{(1)})$. Potom z predchádzajúcej lemy dostávame $|E^0(\beta^{(1)})| = |E(\beta^{(1)})| = 2^{D(\beta^{(1)})} = 2^{D(\beta^{(1)})-0}\binom{D(\beta^{(1)})}{0}$. Z toho vidieť, že tvrdenie platí pre $D(\beta^{(1)}) = 0$ pre všetky d, keďže $d \leq D(\beta^{(1)})$.

V indukčnom kroku predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky $\beta^{(1)}$ a d, také, že $D(\beta^{(1)}) \leq l$, kde $l \geq 0$. Uvažujme také $\beta^{(1)}$, že $D(\beta^{(1)}) = l + 1$. Ak $d = 0$, tvrdenie triviálne platí použitím predošlej lemy. Predpokladajme teda, že $d > 0$. Hľadajme veľkost $E^d(\beta^{(1)})$. Z toho, že $D(\beta^{(1)}) > 0$ je zrejmé, že existuje k také, že $\beta_k^{(1)} = *$. Uvažujme 2 prípady.

Nech $\beta_k^{(2)} = *$. Potom z vektorov $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}$ odstránime k-tú súradnicu. Dostaneme vektory $\bar{\beta}^{(1)}, \bar{\beta}^{(2)} \in V_{n-1}^*$ také, že $D(\bar{\beta}^{(1)}) = l$, $D(\bar{\beta}^{(2)}) = d - 1$ a $\bar{\beta}^{(1)} \preccurlyeq \bar{\beta}^{(2)}$. Z indukčného predpokladu pre $\bar{\beta}^{(1)}$ a $\bar{\beta}^{(2)}$ vyplýva, že počet takýchto vektorov je rovný $|E^{d-1}(\bar{\beta}^{(1)})| = 2^{l-d+1}\binom{l}{d-1}$.

Nech naopak $\beta_k^{(2)} = a \in \{0, 1\}$. Potom podobným spôsobom, odstránením k-tej súradnice dostávame vektory $\bar{\beta}^{(1)}, \bar{\beta}^{(2)} \in V_{n-1}^*$ také, že $D(\bar{\beta}^{(1)}) = l$, $D(\bar{\beta}^{(2)}) = d$ a $\bar{\beta}^{(1)} \preccurlyeq \bar{\beta}^{(2)}$ (lebo sme neodstránili $*$ z $\beta^{(2)}$). Použitím indukčného predpokladu pre $\bar{\beta}^{(1)}$ a $\bar{\beta}^{(2)}$ môžeme tvrdiť, že počet takýchto vektorov je rovný $2 \times |E^d(\bar{\beta}^{(1)})| = 2 \times 2^{l-d}\binom{l}{d} = 2^{l-d+1}\binom{l}{d}$ (za každé $a \in \{0, 1\}$ jeden krát).

Spojením oboch uvažovaných prípadov dostávame, že

$$|E^d(\beta^{(1)})| = 2^{l-d+1}\binom{l}{d-1} + 2^{l-d+1}\binom{l}{d} = 2^{(l+1)-d}\binom{l+1}{d} = 2^{D(\beta^{(1)})-d}\binom{D(\beta^{(1)})}{d}$$

čo sme chceli dokázať. □

Z tejto lemy priamo vyplýva, že veľkosť množiny ${}^{(1)}E_m$ sa dá taktiež určiť ako: $|{}^{(1)}E_m| = |E^m(*^n)| = 2^{n-m}\binom{n}{m}$.

Lema 3.15. *Pre ľubovoľný vektor $\alpha \in V_n$ je veľkosť množiny vektorov $\beta \in V_n^*$ rádu d takých, že $\beta \succcurlyeq \alpha$ rovná práve $\binom{n}{d}$, t.j.*

$$|\bar{E}_n^d(\alpha)| = |\{\beta | D(\beta) = d \wedge \alpha \preccurlyeq \beta\}| = \binom{n}{d}$$

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na n pre všetky d ($d \leq n$). Ak $d = 0$, keďže $D(\beta) = d = 0$, tak pre ľubovoľné n platí, že $\beta \in V_n$, z toho však vyplýva, že musí platiť $\beta = \alpha$. Potom teda $|\bar{E}_n^0(\alpha)| = |\{\alpha\}| = 1 = \binom{n}{0}$. Z toho vidieť, že uvažované tvrdenie platí pre $n = 0$, pre ľubovoľné d, keďže $d \leq n$.

Prepokladajme, že tvrdenie platí pre všetky n a d, také, že $n \leq l$. Uvažujme také n, že $n = l + 1$, t.j. $\alpha \in V_{l+1}$ a $\beta \in V_{l+1}^*$. Ak $d = 0$, tak tvrdenie platí, lebo $\beta = \alpha$ a teda $|\bar{E}_n^0(\alpha)| = 1 = \binom{n}{0}$. Nech $d > 0$. Nech $D(\beta) = d$. Z definície $\preccurlyeq$ vyplýva, že $\alpha_i = \beta_i \vee \beta_i = *$ pre každé i.

Ak $\alpha_i = \beta_i$, potom odstránime i-tú súradnicu z α, β a dostaneme vektory $\bar{\alpha} \in V_l$ a $\bar{\beta} \in V_l^*$ také, že $\bar{\alpha} \preccurlyeq \bar{\beta}$ a $D(\bar{\beta}) = d$. Použitím indukčného predpokladu pre $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ dostávame, že počet vektorov β pre dané α je $|E_l^d(\bar{\alpha})| = \binom{l}{d}$.

Ak $\beta_i = *$ potom analogickým postupom odstánime i-tú súradnicu a dostaneme vektory $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$, také, že $\bar{\alpha} \preccurlyeq \bar{\beta}$ a $D(\bar{\beta}) = d - 1$, lebo sme odstránili $*$ z β. Potom použitím indukčného predpokladu dostávame, že počet takýchto vektorov β pre dané α je $|E_l^{d-1}(\bar{\alpha})| = \binom{l}{d-1}$.

Spojením oboch uvažovaných prípadov môžeme tvrdiť, že počet vektorov β pre α takých, že $\beta \succcurlyeq \alpha$ je rovný

$$|E_n^d(\alpha)| = |E_{l+1}^d(\alpha)| = |E_l^d(\bar{\alpha})| + |E_l^{d-1}(\bar{\alpha})| = \binom{l}{d} + \binom{l}{d-1} = \binom{l+1}{d} = \binom{n}{d}$$

čo sme chceli dokázať. □

Dôsledok 3.16. *Pre ľubovoľný vektor $\beta^{(1)} \in V_n^*$ je veľkosť množiny vektorov $\beta^{(2)} \in V_n^*$ rádu d takých, že $\beta^{(2)} \succcurlyeq \beta^{(1)}$ rovná práve $|\bar{E}_n^d(\beta^{(1)})| = \binom{n-D(\beta^{(1)})}{d-D(\beta^{(1)})}$.*

Dôkaz. Nech $\beta^{(2)} \succcurlyeq \beta^{(1)}$. Nech $D(\beta^{(2)}) = d$. Potom pre ľubovoľné i platí, že $\beta_i^{(1)} = \beta_i^{(2)} \vee \beta_i^{(2)} = *$. Ak $\beta_i^{(1)} = *$, potom aj $\beta_i^{(2)} = *$. Z toho vyplýva, že môžeme z $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}$ odstrániť tie súradnice, pre ktoré $\beta_i^{(1)} = *$. Dostávame vektory $\bar{\beta}^{(1)}, \bar{\beta}^{(2)}$ také, že $\bar{\beta}^{(1)} \in V_{n-D(\beta^{(1)})}$, $\bar{\beta}^{(2)} \in V^*_{n-D(\beta^{(1)})}$, $\bar{\beta}^{(1)} \preccurlyeq \bar{\beta}^{(2)}$ a $D(\bar{\beta}^{(2)}) = d - D(\beta^{(1)})$. Keďže $\bar{\beta}^{(1)} \in V_{n-D(\beta^{(1)})}$, môžeme použiť predchádzajúcu lemu a dostávame, že počet takých $\beta^{(2)}$ pre $\beta^{(1)}$, že $\beta^{(2)} \succcurlyeq \beta^{(1)}$ je rovné $|\bar{E}_n^d(\beta^{(1)})| = |\bar{E}^{d-D(\beta^{(1)})}_{n-D(\beta^{(1)})}(\bar{\beta}^{(1)})| = \binom{n-D(\beta^{(1)})}{d-D(\beta^{(1)})}$. □

Po týchto niekoľkých pomocných tvrdeniach môžeme prejsť k samotnému určeniu počtu dvojíc vektorov z V_n^* a ich prienikov.

Veta 3.17. *Pre každé d veľkosť množiny dvojíc vektorov $(\beta^{(1)}, \beta^{(2)})$, pre ktoré $D(\beta^{(1)}) = m_1, D(\beta^{(2)}) = m_2$ a $D(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) = d$ je rovná práve*

$$\begin{aligned} |E_d^{(m_1,m_2)}| &= |\{(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}) | D(\beta^{(1)}) = m_1 \wedge D(\beta^{(2)}) = m_2 \wedge D(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) = d\}| \\ &= 2^{n-d} \binom{n}{m_1} \binom{m_1}{d} \binom{n-m_1}{m_2-d} \end{aligned}$$

Dôkaz. Nech $\beta^{(3)} = \beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}$, $D(\beta^{(3)}) = d$. Podľa dôsledku 3.10 platí $\beta^{(3)} \preccurlyeq \beta^{(1)}$, $\beta^{(3)} \preccurlyeq \beta^{(2)}$. Potom podľa lemy 3.14 platí, že existuje $|E^{m_1}(*^n)| = 2^{n-m_1}\binom{n}{m_1}$ vektorov $\beta^{(1)}$ a pre daný vektor $\beta^{(1)}$ existuje $|E^d(\beta^{(1)})| = 2^{m_1-d}\binom{m_1}{d}$ vektorov $\beta^{(3)}$. Podľa definície $\preccurlyeq$ platí, že $\beta_i^{(3)} = \beta_i^{(1)} \vee \beta_i^{(1)} = *$. Ak $\beta_i^{(1)} = \beta_i^{(3)} = *$, potom z definície $\odot$ vyplýva, že $\beta_i^{(2)} = *$. Ak $* = \beta_i^{(1)} \neq \beta_i^{(3)}$, potom platí, že $\beta_i^{(2)} = \beta_i^{(3)}$. Z toho dostávame, že hodnoty vektora $\beta^{(2)}$ na súradniciach i takých, že platí jedna z predošlých možností, sú tým jednoznačne určené z daného $\beta^{(1)}$ a $\beta^{(3)}$. Môžeme ich teda odstrániť z $\beta^{(2)}, \beta^{(3)}$, t.j. tie súradnice i, pre ktoré $\beta_i^{(1)} = *$. Získame vektory $\bar{\beta}^{(2)}$, $\bar{\beta}^{(3)}$ také, že $\bar{\beta}^{(3)} \in V_{n-m_1}$, $\bar{\beta}^{(2)} \in V^*_{n-m_1}$ a zároveň $D(\bar{\beta}^{(2)}) = m_2 - d$. Na základe toho a faktu, že $\beta^{(3)} \preccurlyeq \beta^{(2)}$, môžeme použiť lemu 3.15 a dostávame, že existuje $|\bar{E}^{m_2-d}_{n-m_1}(\bar{\beta}^{(3)})| = \binom{n-m_1}{m_2-d}$ vektorov $\bar{\beta}^{(2)}$, to znamená, že aj vektorov $\beta^{(2)}$ pre $\beta^{(3)}$, lebo tie dostaneme doplnením odobraných súradníc.

Z vykonaného rozboru vyplýva, že počet dvojíc vektorov $(\beta^{(1)}, \beta^{(2)})$ uvažovaných v tvrdení je možné určiť ako:

$$|E_d^{(m_1,m_2)}| = |E^{m_1}(*^n)||E^d(\beta^{(1)})||\bar{E}^{m_2-d}_{n-m_1}(\bar{\beta}^{(3)})| = 2^{n-d}\binom{n}{m_1}\binom{m_1}{d}\binom{n-m_1}{m_2-d}$$

čo sme potrebovali dokázať. □

Dôsledok 3.18. *Pre každé d je veľkosť množiny $E_d^{(m_1,m_2)}$ rovná*

$$|E_d^{(m_1,m_2)}| = 2^{n-d}\binom{n}{m_2}\binom{m_2}{d}\binom{n-m_2}{m_1-m}$$

Dôkaz. Rozpísaním predošlého vzorca podľa definície kombinačného čísla a zoskupením vhodných členov dostávame požadovanú rovnosť. □

(Na základe tohoto dôsledku budeme v ďalšom uvažovať jeden alebo druhý zápis podľa toho, čo bude v danej situácii výhodnejšie.)

3.5 Zjednotenie podštruktúr

Podobne ako sme definovali operáciu prieniku podštruktúr, môžeme definovať operáciu, ktorá bude pripomínať zjednotenie, nebude však plne korešpondovať so zjednotením. Okrem toho zavedieme pojem vektorového obalu množiny, špeciálnej najmenšej nadmnožiny s istými vlastnosťami. Nakoniec poukážeme na vzájomnú súvislosť medzi oboma pojmami.

Definícia 3.19. Nech $H \subseteq V_n$ je ľubovoľná podmnožina V_n. Potom pod množinou $E(H)$ rozumieme najmenšiu množinu prvkov z V_n, ktorá obsahuje H a zároveň existuje $\beta \in V_n^*$ také, že $E(H) = E(\beta)$. Množinu $E(H)$ nazveme vektorový obal množiny H. Symbolom $D(H)$ budeme označovať dimenziu množiny H definovanú ako $D(H) = D(\beta)$ pre také β, že $E(H) = E(\beta)$.

Dá sa ukázať, že pre každé $\beta \in V_n^*$ je $E(E(\beta)) = E(\beta)$, t.j. množina $E(\beta)$ je tzv. nasýtená.

Definícia 3.20. Pod operáciou $\uplus$ budeme rozumieť binárnu operáciu na množine $\{0, 1, *\}$ danú nasledujúcou tabuľkou:

$\uplus$	0	1	*
0	0	*	*
1	*	1	*
*	*	*	*

Dá sa opäť nahliadnuť, že pre uvedenú operáciu platí nasledujúce:

$$a \uplus b = c \Longleftrightarrow (a = b = c) \vee (c = * \wedge a \neq b)$$

Definícia 3.21. Pod operáciou $\Cup$ budeme rozumieť binárnu operáciu na množine V_n^* spĺňajúcu nasledovné:

$$\beta^{(1)} \Cup \beta^{(2)} = \begin{cases} \beta^{(3)} & (\forall i \in \{1, \dots n\})\ \beta_i^{(1)} \uplus \beta_i^{(2)} = \beta_i^{(3)} \\ \beta^{(1)} & \beta^{(2)} = \perp \wedge\ \beta^{(1)} \neq \perp \\ \beta^{(2)} & \beta^{(1)} = \perp \end{cases}$$

Lema 3.22. *Pre každé dva vektory* $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ *platí*

$$E(\beta^{(1)}) \cup E(\beta^{(2)}) \subseteq E(\beta^{(1)} \Cup \beta^{(2)})$$

Dôkaz. Nech $\beta^{(3)} = \beta^{(1)} \Cup \beta^{(2)}$. Tvrdenie pre prípad $\beta^{(1)} = \perp$ alebo $\beta^{(2)} = \perp$ je triviálne splnené. Nech teda $\beta^{(1)} \neq \perp$ a $\beta^{(2)} \neq \perp$. Z definície $\Cup$ vieme, že pre každé i platí: $\beta_i^{(3)} = \beta_i^{(1)} \uplus \beta_i^{(2)}$. Použitím definície $\uplus$ dostávame, že $\beta_i^{(3)} = \beta_i^{(1)} = \beta_i^{(2)} \vee (\beta_i^{(3)} = * \wedge \beta_i^{(1)} \neq \beta_i^{(2)})$. Rozpísaním tohoho vzťahu dostávame, že platí $\beta_i^{(1)} = \beta_i^{(3)} \vee \beta_i^{(3)} = *$, resp. $\beta_i^{(2)} = \beta_i^{(3)} \vee \beta_i^{(3)} = *$. To znamená, že $\beta^{(1)} \preccurlyeq \beta^{(3)}$ a taktiež $\beta^{(2)} \preccurlyeq \beta^{(3)}$. Z vety 3.6 potom dostávame, že $E(\beta^{(1)}) \subseteq E(\beta^{(3)})$ a $E(\beta^{(2)}) \subseteq E(\beta^{(3)})$, čiže aj $E(\beta^{(1)}) \cup E(\beta^{(2)}) \subseteq E(\beta^{(3)})$, čo sme chceli dokázať. ☐

Dôsledok 3.23. *Nech* $\beta^{(1)}, \beta^{(1)} \in V_n^*$*, potom platí*

$$\beta^{(1)} \preccurlyeq \beta^{(1)} \Cup \beta^{(2)} \ \wedge \ \beta^{(2)} \preccurlyeq \beta^{(1)} \Cup \beta^{(2)}$$

Dôkaz. Z lemy 3.22 vieme, že $E(\beta^{(1)}) \cup E(\beta^{(2)}) \subseteq E(\beta^{(1)} \Cup \beta^{(2)})$, čiže aj $E(\beta^{(1)}) \subseteq E(\beta^{(1)} \Cup \beta^{(2)})$, t.j. podľa vety 3.6 aj $\beta^{(1)} \preccurlyeq \beta^{(1)} \Cup \beta^{(2)}$. Analogicky aj $\beta^{(2)} \preccurlyeq \beta^{(1)} \Cup \beta^{(2)}$. ☐

Lema 3.24. *Pre ľubovoľné vektory* $\beta, \beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ *platí*

$$\beta^{(1)} \preccurlyeq \beta \wedge \beta^{(2)} \preccurlyeq \beta \Longleftrightarrow \beta^{(1)} \Cup \beta^{(2)} \preccurlyeq \beta$$

Dôkaz. Nech $\beta^{(3)} = \beta^{(1)} \Cup \beta^{(2)}$. Ľahko vidieť, že pre prípad $\beta = \perp$ je tvrdenie platné, lebo potom $\beta^{(1)} = \beta^{(2)} = \beta^{(3)} = \perp$. Podobne aj, ak $\beta^{(1)} = \perp$ resp. $\beta^{(2)} = \perp$, je $\beta^{(1)} \Cup \beta^{(2)}$ rovné $\beta^{(2)}$ resp. $\beta^{(1)}$, a teda tvrdenie platí. Nech teda $\beta^{(1)} \neq \perp$, $\beta^{(2)} \neq \perp$ a $\beta^{(3)} \neq \perp$.

Nech $\beta^{(3)} \preccurlyeq \beta$. Z lemy 3.6 potom vieme, že $E(\beta^{(3)}) \subseteq E(\beta)$. Na základe lemy 3.22 vieme, že $E(\beta^{(1)}) \cup E(\beta^{(2)}) \subseteq E(\beta^{(3)})$, takže platí aj $E(\beta^{(1)}) \cup E(\beta^{(2)}) \subseteq E(\beta)$. Z toho môžeme usúdiť, že platí: $E(\beta^{(1)}) \subseteq E(\beta)$ a $E(\beta^{(2)}) \subseteq E(\beta)$, čo znamená, že $\beta^{(1)} \preccurlyeq \beta$ a $\beta^{(2)} \preccurlyeq \beta$.

Nech naopak $\beta^{(1)} \preccurlyeq \beta$ a $\beta^{(2)} \preccurlyeq \beta$, to znamená, že pre každé i platí: $\beta_i^{(1)} = \beta_i \vee \beta_i = *$ a $\beta_i^{(2)} = \beta_i \vee \beta_i = *$. Z definície $\Cup$ vieme, že $\beta_i^{(3)} = \beta_i^{(2)} = \beta^{(1)} \vee (\beta_i^{(3)} = * \wedge \beta_i^{(1)} \neq \beta_i^{(2)})$. Ľahko potom vidieť, že keď $\beta_i \neq *$, potom sa musí $\beta_i = \beta_i^{(1)} = \beta_i^{(2)}$, a teda aj $\beta^{(3)} = \beta^{(2)} = \beta^{(1)}$. Vyplýva z toho, že $\beta_i^{(3)} = \beta_i \vee \beta_i^{(3)} = *$, t.j. $\beta^{(3)} \preccurlyeq \beta$, čo sme chceli dokázať. ☐

Definícia 3.25. Nech $\bar{E}(H)$ je množina takých $\beta \in V_n^*$, že $H \subseteq E(\beta)$, t.j.

$$\bar{E}(H) = \{ \ \beta \mid \beta \in V_n^*, \ H \subseteq E(\beta) \ \}$$

Lema 3.26. *Nech* $H \subseteq V_n$*. Potom platí*

$$E(H) = E(\bigodot_{\beta \in \bar{E}(H)} \beta)$$

Dôkaz. Najprv nahliadneme, že ak $\beta^{(1)} \in \bar{E}(H)$ a $\beta^{(2)} \in \bar{E}(H)$, potom $\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)} \in \bar{E}(H)$, pretože potom $H \subseteq E(\beta^{(1)})$ a $H \subseteq E(\beta^{(2)})$, a teda $H \subseteq E(\beta^{(1)}) \cap E(\beta^{(2)}) = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$. Na základe toho, potom platí aj, že $(\bigodot_{\beta \in \bar{E}(H)} \beta) \in \bar{E}(H)$ (ďalej už len $\bigodot \beta$). Podľa dôsledku 3.10 potom pre každé $\beta' \in \bar{E}(H)$ platí, že $\bigodot \beta \preccurlyeq \beta'$. Z definície $E(H)$ vieme, že ak $E(H) = E(\hat{\beta})$, potom $\hat{\beta} \in \bar{E}(H)$. Z toho vyplýva, že $\bigodot \beta \preccurlyeq \hat{\beta}$. Z minimality $\hat{\beta}$ potom vyplýva, že platí $\bigodot \beta = \hat{\beta}$, čo sme chceli dokázať. ☐

Veta 3.27. *Nech $H \subseteq V_n$. Potom platí*

$$\bigodot_{\beta \in \bar{E}(H)} \beta = \biguplus_{\alpha \in H} \alpha$$

Dôkaz. (označme si tvrdenie v tvare $\bigodot \beta = \biguplus \alpha$). Nech $\beta' \in \bar{E}(H)$. Potom pre ľubovoľné $\alpha' \in H$ platí $\alpha' \preccurlyeq \beta'$. Niekoľkonásobným použitím lemy 3.24 pre všetky $\alpha \in H$ dostávame, že $\biguplus \alpha \preccurlyeq \beta'$. Ako vieme z dôkazu predošlej lemy platí, že $\bigodot \beta \in \bar{E}(H)$, z toho vyplýva, že platí $\biguplus \alpha \preccurlyeq \bigodot \beta$. Použitím dôsledku 3.23 pre všetky $\alpha' \in H$ dostávame, že $\alpha' \preccurlyeq \biguplus \alpha$. Z toho ale vyplýva, že $\biguplus \alpha \in \bar{E}(H)$, a teda aj $\bigodot \beta \preccurlyeq \biguplus \alpha$. Z antisymetrickosti relácie $\preccurlyeq$ potom vyplýva, že $\bigodot \beta = \biguplus \alpha$, čo sme chceli dokázať. ☐

Dôsledok 3.28. *Nech $H \subseteq V_n$ je ľubovoľný podgraf E_n. Potom platí*

$$E(H) = E(\biguplus_{\alpha \in H} \alpha)$$

Dôkaz. Použitím vety 3.27 a lemy 3.26 dostávame hľadané tvrdenie. ☐

3.6 Ďalšie vlastnosti

V tejto časti uvádzame niektoré ďalšie vlastnosti, ktoré vzhľadom na ich všeobecný charakter sú vhodné pre ďalšie skúmanie štruktúry E_n.

Lema 3.29. *Nech $\alpha, \alpha' \in V_n$. Nech $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, nech $J \subseteq I$. Nech $\alpha' = \alpha + \sum_{i \in I} e_i$. Nech $\beta \in V_n^*$. Potom ak*

$$\alpha, \alpha' \in E(\beta) \Longrightarrow (\alpha + \sum_{j \in J} e_j) \in E(\beta)$$

Dôkaz. Nech $\alpha, \alpha' \in E(\beta)$, t.j. $\alpha \preccurlyeq \beta$ a $\alpha' \preccurlyeq \beta$. Použitím definície $\preccurlyeq$ dostávame, že pre každé i platí: $\alpha_i = \beta_i \vee \beta_i = *$, $\alpha'_i = \beta_i \vee \beta_i = *$. Nech $i \in I$. Potom je zrejmé, že $\beta_i = *$, pretože $\alpha_i \neq \alpha'_i$. Nech $J \subseteq I$. Nech $\alpha'' = \alpha + \sum_{j \in J} e_j$. Z toho vieme, že aj pre každé $j \in J$ platí, že $\beta_j = *$. Navyše ak $j \notin J$, tak $\alpha''_j = \alpha_j$. A z toho, že pre každé i platí $\alpha_i = \beta_i \vee \beta_i = *$, potom platí aj $\alpha''_i = \beta_i \vee \beta_i = *$, čo je ekvivalentné so zápisom $\alpha'' \preccurlyeq \beta$, resp. $\alpha'' \in E(\beta)$, čo sme chceli dokázať. ☐

Lema 3.30. *Nech $\beta \in V_n^*$. Nech $\alpha, \alpha' \in E(\beta)$. Potom $|\alpha - \alpha'| \leq D(\beta)$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že existujú také $\alpha, \alpha' \in E(\beta)$, že $|\alpha - \alpha'| > D(\beta)$, t.j. existuje $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $|I| > D(\beta)$ také, že $\alpha' = \alpha + \sum_{i \in I} e_i$. Z dôkazu predošlej lemy je vidieť, že pre každé $i \in I$ platí, že $\beta_i = *$. To znamená, že počet $*$ vo vektore β je aspoň $|I|$, t.j. $D(\beta) \geq |I|$. A to je spor, pretože sme predpokladali, že platí: $|I| > D(\beta)$. Teda musí pre každé $\alpha, \alpha' \in E(\beta)$ platiť, že $|\alpha - \alpha'| \leq D(\beta)$, čo sme chceli dokázať. □

Definícia 3.31. Nech $\beta \in V_n^*$. Potom symbolom I_β budeme rozumieť množinu všetkých indexov súradníc β, ktoré majú hodnotu $*$, t.j.

$$I_\beta = \{\ i \mid \beta_i = *\ \}$$

Lema 3.32. *Nech $\beta \in V_n^*$. Nech $J \subseteq I_\beta$. Nech $\alpha \in V_n$. Potom*

$$\alpha \in E(\beta) \Longrightarrow (\alpha + \sum_{j \in J} e_j) \in E(\beta)$$

Dôkaz. Stačí dokázať, že $\alpha' = (\alpha + \sum_{i \in I_\beta} e_i) \in E(\beta)$. Tvrdenie potom vyplýva z lemy 3.29. To však očividne platí, pretože, ak $i \in I_\beta$, tak $\beta_i = *$ a ak $i \notin I_\beta$, tak $\alpha_i = \alpha'_i$, a naviac z faktu, že $\alpha \in E(\beta)$, t.j. $\alpha \preccurlyeq \beta$, dostávame, že $(\forall i) : \alpha'_i = \beta_i \vee \beta_i = *$, t.j. $\alpha' \preccurlyeq \beta$, a teda $\alpha' \in E(\beta)$, čo sme chceli dokázať. □

Lema 3.33. *Nech $\alpha, \alpha' \in V_n$, $i, j \in \{0, 1\}$. Potom*

$$P_i \cap P_j = \begin{cases} P_i & i = j \\ \emptyset & i \neq j \end{cases}$$

$$B(\alpha) \cap P_i = \begin{cases} \{\alpha\} & |\alpha| \equiv i \pmod 2 \\ C(\alpha) & |\alpha| \not\equiv i \pmod 2 \end{cases}$$

$$B(\alpha) \cap B(\alpha') = \begin{cases} B(\alpha) & \alpha = \alpha' \\ \{\alpha, \alpha'\} & |\alpha - \alpha'| = 1 \\ \{\alpha + e_k, \alpha + e_l\} & |\alpha - \alpha'| = 2 \\ \emptyset & |\alpha - \alpha'| > 2 \end{cases}$$

kde $\alpha' = \alpha + e_k + e_l$; $k \neq l$, ak $|\alpha - \alpha'| = 2$.

Dôkaz. Rozoberieme si jednotlivé tvrdenia lemy samostatne. Najprv ľahko vidieť, že $P_i \cap P_j = \emptyset$, ak $i \neq j$, pretože pre každý prvok $\alpha \in P_i$ platí $|\alpha| \equiv i \neq j \pmod 2$, to znamená, že $\alpha \notin P_j$. Z uvedeného taktiež vyplýva aj to, že $P_i \cap P_j = P_i$, ak $i = j$. Podobne aj prípad prieniku $B(\alpha) \cap P_i$. Množina $B(\alpha)$ obsahuje okrem vektora α aj vektory $\alpha + e_k$ pre ľubovoľné k. Z toho je zrejmé, že $|\alpha| \not\equiv |\alpha + e_k| \pmod 2$. To znamená, že ak $|\alpha| \equiv i \pmod 2$, tak $\alpha \in B(\alpha) \cap P_i$, ale pre každé k platí $\alpha + e_k \notin B(\alpha) \cap P_i$ a naopak, ak $|\alpha| \not\equiv i \pmod 2$, potom $\alpha \notin B(\alpha) \cap P_i$, ale $\alpha + e_k \in B(\alpha) \cap P_i$. A keďže množinu $C(\alpha)$ tvoria práve len vrcholy $\alpha + e_k$ pre všetky k, vyplýva z toho hľadané tvrdenie.

Rozoberme si prípad prieniku $B(\alpha) \cap B(\alpha')$. Ak $\alpha = \alpha'$, tak triviálne $B(\alpha) \cap B(\alpha') = B(\alpha)$. Nech $|\alpha - \alpha'| = 1$, t.j. existuje l, že $\alpha' = \alpha + e_l$. Z toho vyplýva, že prvky α, α' patria do prieniku $B(\alpha) \cap B(\alpha')$. Uvažujme prvok z $B(\alpha)$ rôzny od α', t.j. $\alpha + e_k$, kde $k \neq l$. Potom $|\alpha + e_k - \alpha'| = |e_k + e_l| = 2$. To znamená, že $\alpha + e_k \notin B(\alpha')$. Podobne sa ukáže, že $\alpha' + e_k \notin B(\alpha)$, ak $k \neq l$. Z toho priamo vyplýva, že $B(\alpha) \cap B(\alpha') = \{\alpha, \alpha'\}$.

Nech $|\alpha - \alpha'| = 2$, t.j. existujú $k \neq l$, že $\alpha' = \alpha + e_k + e_l$. Z toho je ľahko vidieť, že $\alpha, \alpha' \notin B(\alpha) \cap B(\alpha')$. Uvažujme teda prvok z $B(\alpha)$ rôzny od α, t.j. $\alpha + e_{k'}$ pre nejaké k'. Počítajme $|\alpha + e_{k'} - \alpha'| = |e_{k'} + e_k + e_l|$. Z tohoto zápisu vidieť, že na to aby $\alpha + e_{k'}$ patril do $B(\alpha')$, musí platiť, že buď $k' = k$ alebo $k' = l$. Rovnako aj v prípade príslušnosti $\alpha' + e_{k'}$ do $B(\alpha)$. Z toho už jasne vyplýva, že $B(\alpha) \cap B(\alpha') = \{\alpha + e_k, \alpha + e_l\}$.

Nakoniec ak $|\alpha - \alpha'| > 2$, je vidieť, že pre ľubovoľné $\alpha + e_{k'}$ platí, že $|\alpha + e_{k'} - \alpha'| \geq |\alpha - \alpha'| - 1 > 1$, to znamená, že $B(\alpha) \cap B(\alpha') = \emptyset$.

Spojením uvažovaných prípadov dostávame hľadané tvrdenie. $\square$

Kapitola 4

Prieniky podgrafov

V tejto kapitole budeme pokračovať v rozbore prienikov podštruktúr E_n, ktorý sme začali v kapitole 3 a na základe toho vyjadríme tvar funkcie enumerujúcej počty dvojíc podštruktúr podľa veľkosti prieniku a z neho vychádzajúce dôsledky.

4.1 Výpočet veľkostí prienikov

Na ďalšie použitie (predovšetkým na určenie disperzie náhodnej premennej $\xi_{n,m}$ definovanej v kapitole 5) budeme potrebovať vyjadriť veľkosti a počty prienikov ľubovoľných podgrafov E_n izomorfných s E_m. Pre tento účel si definujeme generujúcu funkciu (v špeciálnom tvare) na enumeráciu počtov prienikov pre ich jednotlivé veľkosti.

Definícia 4.1. Generujúcou funkciou $G_{n,m}(p_n)$ budeme rozumieť funkciu definovanú pre $p_n \in <0, 1>$ danú predpisom

$$G_{n,m}(p_n) = \sum_{i \geq 0} g_i \; p_n^{-i} = \sum_{H_1, H_2 \in A_{n,m}} (p_n^{-|H_1 \cap H_2|} - 1)$$

kde $A_{n,m} = {}^{(1)}E_m \cup {}^{(2)}E_{m+1} \cup {}^{(3)}E_{2^m-1} \cup {}^{(4)}E_{2^m}$ (viď. definícia 2.27)

Z definície vidieť, že g_i určuje počet dvojíc podgrafov H_1, H_2 z $A_{n,m}$, ktorých prienik je rovný práve i, okrem $i = 0$. Avšak tento tvar bol špeciálne zvolený práve preto, aby uľahčil výpočet už spomínanej disperzie náhodnej premennej $\xi_{n,m}$.

Rozoberieme si teda postupne jednotlivé možné prípady pre podgrafy H_1 a H_2 podľa ich príslušnosti do jednotlivých typov podštruktúr. Výrazy vyjadrujúce počty jednotlivých možností pre dané typy podštruktúr (i_1), (i_2) pre H_1 resp. H_2, t.j. príspevok do $G_{n,m}$ pre grafy z $({}^{(i_1)}E_{m_1}, {}^{(i_2)}E_{m_2})$, označíme ako ${}^{(i_1,i_2)}S_{(m_1,m_2)}$, t.j.

$${}^{(i_1,i_2)}S_{(m_1,m_2)} = \sum_{H_1 \in {}^{(i_1)}E_{m_1}, H_2 \in {}^{(i_2)}E_{m_2}} (p_n^{-|H_1 \cap H_2|} - 1)$$

Prípad $({}^{(1)}E_{m_1}, {}^{(1)}E_{m_2})$

Nech $H_1 \in {}^{(1)}E_{m_1}, H_2 \in {}^{(1)}E_{m_2}$. Budeme hľadať veľkosť prieniku $|H_1 \cap H_2|$. Ako vidieť zo zápisu $G_{n,m}$, ak $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, tak $p_n^{-|H_1 \cap H_2|} - 1 = 0$, takže takéto dvojice (H_1, H_2) prispejú do sumy hodnotnou 0, a preto sa nimi nebudeme zaoberať. Odteraz budeme predpokladať, že $|H_1 \cap H_2| \neq \emptyset$.

Použijme lemu 3.12 pre H_1 a H_2 a dostávame, že existuje $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ také, že $H_1 = E(\beta^{(1)}))$ a $H_2 = E(\beta^{(2)})$. Potom $D(\beta^{(1)}) = m_1$ a $D(\beta^{(2)}) = m_2$. Keďže $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)}) \cap E(\beta^{(2)}) = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$, položme $d = D(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$.

Použitím vety 3.17 potom dostávame, že počet takýchto dvojíc (H_1, H_2) je rovný práve:

$$|E_d^{(m_1,m_2)}| = 2^{n-d}\binom{n}{m_1}\binom{m_1}{d}\binom{n-m_1}{m_2-d}$$

Vyjadrime si pomocou týchto informácií príspevok do $G_{n,m}$:

$${}^{(1,1)}S_{(m_1,m_2)} = \sum_{\substack{H_1 \in {}^{(1)}E_{m_1} \\ H_2 \in {}^{(1)}E_{m_2}}} (p_n^{-|H_1 \cap H_2|} - 1) = \sum_{d=0}^{\min\{m_1,m_2\}} |E_d^{m_1,m_2}|(p_n^{-2^d} - 1) =$$

$$= \sum_{d=0}^{\min\{m_1,m_2\}} 2^{n-d}\binom{n}{m_1}\binom{m_1}{d}\binom{n-m_1}{m_2-d}(p_n^{-2^d} - 1)$$

keďže $|H_1 \cap H_2| = |E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})| = 2^d$.

Prípad $({}^{(1)}E_{m_1}, {}^{(2)}E_{m_2})$

Ďalej budeme postupovať principiálne rovnakým spôsobom. Nech teda $H_1 \in {}^{(1)}E_{m_1}$, $H_2 \in {}^{(2)}E_{m_2}$. Potom existuje $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ a $i \in \{0,1\}$ také, že $H_1 = E(\beta^{(1)})$ a $H_2 = E(\beta^{(2)}) \cap P_i$. Potom $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap P_i$. Nech $d = D(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$. Z lemy 3.12 potom vieme, že $H_1 \cap H_2 \in {}^{(2)}E_d$. Z toho ďalej vyplýva, že ak $d > 0$, potom $|H_1 \cap H_2| = 2^{d-1}$. Ak $d = 0$, tak $|H_1 \cap H_2| = 1$, ak $\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)} \in P_i$. Inak je prienik prázdny. Ale keď $\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)} \notin P_i$, potom $\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)} \in P_{1-i}$. Čiže, ak budeme sumovať cez všetky hodnoty i, každé takéto (H_1, H_2) prispeje do sumy nenulovou čiastkou práve raz. Na základe uskutočneného rozboru môžeme vypočítať príspevok do $G_{n,m}$ nasledovne:

$$\sum_{i \in \{0,1\}} \sum_{\substack{H_1 \in {}^{(1)}E_{m_1} \\ H_2 \in {}^{(2)}_{\ i}E_{m_2} \\ d>0}} (p_n^{-|H_1 \cap H_2|} - 1) = 2 \sum_{d=1}^{\min\{m_1,m_2\}} |E_d^{(m_1,m_2)}|(p_n^{-2^{d-1}} - 1)$$

$$= \sum_{d=0}^{\min\{m_1,m_2\}-1} 2^{n-d}\binom{n}{m_1}\binom{m_1}{d+1}\binom{n-m_1}{m_2-d-1}(p_n^{-2^d} - 1)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\{0,1\}} \sum_{\substack{H_1 \in^{(1)} E_{m_1} \\ H_2 \in^{(1)}_i E_{m_2} \\ d=0}} (p_n^{-|H_1\cap H_2|} - 1) &= \\
&= |E_0^{(m_1,m_2)}|(p_n^{-1} - 1) = 2^n \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}(p_n^{-1}-1)
\end{aligned}$$

potom teda:

$$\begin{aligned}
{}^{(1,2)}S_{(m_1,m_2)} &= 2^n\binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}(p_n^{-1}-1) + \\
&+ \sum_{d=0}^{\min\{m_1,m_2\}-1} 2^{n-d}\binom{n}{m_1}\binom{m_1}{d+1}\binom{n-m_1}{m_2-d-1}(p_n^{-2^d}-1)
\end{aligned}$$

Prípad $({}^{(2)}E_{m_1}, {}^{(2)}E_{m_2})$

Nech $H_1 \in {}^{(1)}E_{m_1}$, $H_2 \in {}^{(2)}E_{m_2}$. Potom existuje $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ a $i_1, i_2 \in \{0,1\}$ také, že $H_1 = E(\beta^{(1)}) \cap P_{i_1}$ a $H_2 = E(\beta^{(2)}) \cap P_{i_2}$. Potom $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap P_{i_1} \cap P_{i_2}$. Je zrejme vidieť, že ak $i_1 \neq i_2$, potom $P_{i_1} \cap P_{i_2} = \emptyset$. Predpokladajme teda, že $i_1 = i_2 = i$. Potom $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap P_i$ a to nám redukuje problém na prípad $({}^{(1)}E_{m_1}, {}^{(2)}E_{m_2})$, t.j. platí, že

$${}^{(2,2)}S_{(m_1,m_2)} = {}^{(1,2)}S_{(m_1,m_2)}$$

Prípad $({}^{(1)}E_{m_1}, {}^{(3)}E_{m_2})$

Nech $H_1 \in {}^{(1)}E_{m_1}$, $H_2 \in {}^{(3)}E_{m_2}$. Potom existuje $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ a $\alpha \in E(\beta^{(2)})$ také, že $H_1 = E(\beta^{(1)})$ a $H_2 = E(\beta^{(2)}) \cap B(\alpha)$. Potom $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap B(\alpha)$. Nech $d = D(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$.

Predpokladajme, že $\alpha \in E(\beta^{(1)})$, t.j. $\alpha \in E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$. Potom je vidieť, že $H_1 \cap H_2 \in {}^{(3)}E_d$. Na základe toho potom vieme, že $|H_1 \cap H_2| = d+1$. Ostáva určiť počet takýchto prípadov. Je však vidieť, že ľubovoľné $\alpha \in E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$ spĺňa predpoklady a iné α už nie. A keďže $|E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})| = 2^d$, počet výberov dvojíc (H_1, H_2), takých, že $\alpha \in E(\beta^{(1)})$, je potom rovný práve $|E_d^{(m_1,m_2)}|2^d$.

Naopak predpokladajme, že $\alpha \notin E(\beta^{(1)})$. Ľubovoľný iný prvok $B(\alpha)$ môžeme písať v tvare $\alpha + e_k$ pre vhodné k. Predpokladajme, že existuje nejaké k, že $\alpha + e_k \in E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$. Ak takých k bude viac, t.j. pre nejaké k' platí, že $\alpha + e_{k'} \in E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$, prepíšeme si $\alpha + e_{k'}$ resp. α ako $\alpha + e_{k'} = (\alpha + e_k) + e_k + e_{k'}$ a $\alpha = (\alpha + e_k) + e_k$, a na základe lemy 3.29 dostávame, že $\alpha \in E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$, t.j. $\alpha \in E(\beta^{(1)})$, čo je spor s predpokladom. Z toho môžeme usúdiť, že $H_1 \cap H_2 = \{\alpha + e_k\}$, a teda $|H_1 \cap H_2| = 1$. Podobne ako v predošlom prípade z toho, že $\alpha + e_k \in E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$, vieme, že počet výberov $\alpha + e_k$ je rovný

2^d. Potrebujeme ešte určiť α tak, aby $\alpha \notin E(\beta^{(1)})$. Použitím lemy 3.32 vidieť, že $k \notin I_{\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}}$, pretože potom by platilo, že $\alpha \in E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$. Taktiež, ak by $k \notin I_{\beta^{(2)}}$, potom by platilo, že $\beta_k^{(2)} = *$, lebo $\alpha \preccurlyeq \beta^{(2)}$ aj $\alpha + e_k \preccurlyeq \beta^{(2)}$, ale to by znamenalo, že $k \in I_{\beta^{(2)}}$, čo by bol spor. Z toho usúdime, že musí platiť, že $k \in I_{\beta^{(2)}} \backslash I_{\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}}$, čiže počet výberov k je rovný $|I_{\beta^{(2)}} \backslash I_{\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}}| = m_2 - d$.

Spolu dostávame, že počet dvojíc (H_1, H_2) pre také α, že $\alpha \notin E(\beta^{(1)})$, je rovný $|E_d^{(m_1,m_2)}|(m_2 - d)2^d$.

Nakoniec vyjadríme na základe vykonaného rozboru príspevok do $G_{n,m}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{H_1 \in {}^{(1)}E_{m_1}, H_2 \in {}^{(3)}E_{m_2} \\ \alpha \in E(\beta^{(1)})}} (p_n^{-|H_1 \cap H_2|} - 1) &= \sum_{d=0}^{\min\{m_1,m_2\}} |E_d^{(m_1,m_2)}| 2^d (p^{-(d+1)} - 1) \\
&= \sum_{d=0}^{\min\{m_1,m_2\}} 2^n \binom{n}{m_1}\binom{m_1}{d}\binom{n-m_1}{m_2-d}(p_n^{-(d+1)} - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{H_1 \in {}^{(1)}E_{m_1}, H_2 \in {}^{(3)}E_{m_2} \\ \alpha \notin E(\beta^{(1)})}} (p_n^{-|H_1 \cap H_2|} - 1) &= \sum_{d=0}^{\min\{m_1,m_2\}} |E_d^{(m_1,m_2)}| 2^d (m_2 - d)(p_n^{-1} - 1) \\
&= \sum_{d=0}^{\min\{m_1,m_2\}} 2^{n-d} \binom{n}{m_1}\binom{m_1}{d}\binom{n-m_1}{m_2-d} 2^d (m_2 - d)(p_n^{-1} - 1) \\
&= 2^n \binom{n}{m_1}(p_n^{-1} - 1)(n - m_1) \sum_{d=0}^{\min\{m_1,m_2\}} \binom{m_1}{d}\binom{n-m_1-1}{m_2-1-d} \\
&= 2^n \binom{n-1}{m_1}\binom{n}{m_2} m_2 (p_n^{-1} - 1)
\end{aligned}$$

Spolu dostávame:

$$\begin{aligned}
{}^{(1,3)}S_{(m_1,m_2)} &= 2^n \binom{n-1}{m_1}\binom{n}{m_2} m_2 (p_n^{-1} - 1) + \\
&+ \sum_{d=1}^{\min\{m_1,m_2\}+1} 2^n \binom{n}{m_1}\binom{m_1}{d-1}\binom{n-m_1}{m_2-d+1}(p_n^{-d} - 1)
\end{aligned}$$

Prípad $({}^{(1)}E_{m_1}, {}^{(4)}E_{m_2})$

Nech $H_1 \in {}^{(1)}E_{m_1}$, $H_2 \in {}^{(4)}E_{m_2}$. Potom existuje $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ a $\alpha \in E(\beta^{(2)})$ také, že $H_1 = E(\beta^{(1)})$ a $H_2 = E(\beta^{(2)}) \cap C(\alpha)$. Potom $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap C(\alpha)$. Nech $d = D(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$.

Keďže $C(\alpha) = B(\alpha)\backslash\{\alpha\}$, môžeme počet možností v tomto prípade odvodiť, z už vykonaného rozboru pre $({}^{(1)}E_{m_1}, {}^{(3)}E_{m_2})$. Ak $\alpha \in E(\beta^{(1)})$, potom zrejme $H_1 \cap H_2 \in {}^{(4)}E_d$ a teda $|H_1 \cap H_2| = d$. V prípade, že $\alpha \notin E(\beta^{(1)})$, môže nastať len situácia, že existuje k také, že $H_1 \cap H_2 = \{\alpha + e_k\}$, čo znamená, že vyjadrenie počtu možností bude totožné tomu v $({}^{(1)}E_{m_1}, {}^{(3)}E_{m_2})$.

Na základe toho vieme vyjadriť počet dvojích (H_1, H_2) ako:

$$\begin{aligned} {}^{(1,4)}S_{(m_1,m_2)} &= 2^n \binom{n-1}{m_1}\binom{n}{m_2} m_2(p_n^{-1} - 1) + \\ &+ \sum_{d=1}^{\min\{m_1,m_2\}} 2^n \binom{n}{m_1}\binom{m_1}{d}\binom{n-m_1}{m_2-d}(p_n^{-d} - 1) \end{aligned}$$

Prípad $({}^{(2)}E_{m_1}, {}^{(3)}E_{m_2})$

Nech $H_1 \in {}^{(2)}E_{m_1}$, $H_2 \in {}^{(3)}E_{m_2}$. Potom existuje $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ a $\alpha \in E(\beta^{(2)})$, $i \in \{0,1\}$ také, že $H_1 = E(\beta^{(1)}) \cap P_i$ a $H_2 = E(\beta^{(2)}) \cap B(\alpha)$. Potom $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap B(\alpha) \cap P_i$. Nech $d = D(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$.

Z lemy 3.33 vieme, že ak $\alpha \in P_i$, potom $H_1 \cap H_2 = \{\alpha\}$, ak $\alpha \in E(\beta^{(1)})$, inak $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap C(\alpha)$. Ak $\alpha \in P_i$, tak z toho, že $\alpha \in E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$, vieme , že $\alpha \in E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap P_i$. Vždy platí, že $\alpha \in P_i$ alebo $\alpha \in P_{1-i}$. Ak budeme uvažovať, že sumujeme cez všetky hodnoty i, potom môžeme priamo vybrať ľubovoľné $\alpha \in E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$, keďže počet možností nezávisí od konkrétneho i. Z toho vieme potom určiť počet možností výberu α, ktorých bude $|E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})| = 2^d$. Čiže počet všetkých uvažovaných dvojíc (H_1, H_2) bude rovný $|E_d^{(m_1,m_2)}|2^d$.

Ak $\alpha \notin P_i$, potom $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap C(\alpha)$. Použijeme predošlý argument o sumovaní cez všetky hodnoty i a z toho vieme povedať, že počet možností bude rovnaký ako v prípade $({}^{(1)}E_{m_1}, {}^{(4)}E_{m_2})$.

Na základe tohoto rozboru môžeme vypočítať príspevok do $G_{n,m}$ nasledovne:

$$\sum_{i\in\{0,1\}} \sum_{\substack{H_1 \in {}^{(2)}E_{m_1} \\ H_2 \in {}^{(3)}E_{m_2} \\ \alpha \in P_i}} (p_n^{-|H_1 \cap H_2|} - 1) = \sum_{d=0}^{\min\{m_1,m_2\}} |E_d^{(m_1,m_2)}| 2^d (p_n^{-1} - 1) =$$

$$= \sum_{d=0}^{\min\{m_1,m_2\}} 2^n \binom{n}{m_1}\binom{m_1}{d}\binom{n-m_1}{m_2-d}(p_n^{-1} - 1) = 2^n \binom{n}{m_1}\binom{n}{m_2}(p_n^{-1} - 1)$$

Spolu dostávame:

$${}^{(2,3)}S_{(m_1,m_2)} = 2^n \binom{n}{m_1}\binom{n}{m_2}(p_n^{-1} - 1) + {}^{(1,4)}S_{(m_1,m_2)}$$

Prípad $({}^{(2)}E_{m_1}, {}^{(4)}E_{m_2})$

Nech $H_1 \in {}^{(2)}E_{m_1}$, $H_2 \in {}^{(4)}E_{m_2}$. Potom existuje $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ a $\alpha \in E(\beta^{(2)})$, $i \in \{0,1\}$ také, že $H_1 = E(\beta^{(1)}) \cap P_i$ a $H_2 = E(\beta^{(2)}) \cap C(\alpha)$. Potom $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap C(\alpha) \cap P_i$. Nech $d = D(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$.

Opäť z faktu, že $C(\alpha) = B(\alpha) \setminus \{\alpha\}$, je možné ľahko odvodiť hľadaný výraz použitím predošlého rozboru. Ak $\alpha \in P_i$, potom $C(\alpha) \cap P_i = \emptyset$. Ak $\alpha \notin P_i$, potom $C(\alpha) \cap P_i = C(\alpha)$. Z argumentu o sumovaní cez všetky hodnoty i môžeme potom usúdiť, že počet možností je zhodný s počtom uvažovaným v druhej časti rozboru $({}^{(2)}E_{m_1}, {}^{(3)}E_{m_2})$, čo je rovnaký počet ako v prípade $({}^{(1)}E_{m_1}, {}^{(4)}E_{m_2})$.

Na základe toho potom platí:

$$ {}^{(2,4)}S_{(m_1,m_2)} = {}^{(1,4)}S_{(m_1,m_2)} $$

Prípad $({}^{(3)}E_{m_1}, {}^{(3)}E_{m_2})$

Nech $H_1 \in {}^{(3)}E_{m_1}$, $H_2 \in {}^{(3)}E_{m_2}$. Potom existuje $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ a $\alpha \in E(\beta^{(1)})$, $\alpha' \in E(\beta^{(2)})$ také, že $H_1 = E(\beta^{(1)}) \cap B(\alpha)$ a $H_2 = E(\beta^{(2)}) \cap B(\alpha')$. Potom $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap B(\alpha) \cap B(\alpha')$. Nech $d = D(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$.

Z lemy 3.33 vieme, že môžu nastať 3 prípady pre polohu α, α'. Ak $\alpha = \alpha'$, potom $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap B(\alpha)$, to znamená, že $H_1 \cap H_2 \in {}^{(3)}E_d$, čiže počet možností bude totožný s tým v prvej časti prípadu $({}^{(1)}E_{m_1}, {}^{(3)}E_{m_2})$, keď $\alpha \in E(\beta^{(1)})$.

Nech $|\alpha - \alpha'| = 1$. Potom existuje k také, že $\alpha' = \alpha + e_k$. Z vyššie spomenutej lemy vieme, že $|H_1 \cap H_2| \subseteq B(\alpha) \cap B(\alpha') \subseteq \{\alpha, \alpha'\}$. Potrebujeme určiť $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}$. Vieme, že platí $\alpha \preccurlyeq \beta^{(1)}$ a $\alpha' = \alpha + e_k \preccurlyeq \beta^{(2)}$. Predpokladajme, že $\alpha + e_k \preccurlyeq \beta^{(1)}$ a $\alpha \preccurlyeq \beta^{(2)}$, čiže $\alpha, \alpha' \in E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$, a teda $|H_1 \cap H_2| = 2$. Potom z definície $\preccurlyeq$ môžeme tvrdiť, že $\beta_k^{(1)} = \beta_k^{(2)} = *$. Odstránime z $\alpha, \alpha', \beta^{(1)}, \beta^{(2)}$ k-tú súradnicu a dostaneme vektory $\bar{\alpha}, \bar{\alpha}', \bar{\beta}^{(1)}, \bar{\beta}^{(2)} \in V_{n-1}^*$ s vlastnosťou $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'$, $\bar{\alpha} \preccurlyeq \bar{\beta}^{(1)}$ a $\bar{\alpha}' \preccurlyeq \bar{\beta}^{(2)}$. Naviac platí, že $D(\bar{\beta}^{(1)}) = m_1 - 1$, $D(\bar{\beta}^{(2)}) = m_2 - 1$. Keďže ale $\bar{\alpha} \in V_{n-1}$, môžeme použiť lemu 3.15 a dostávame, že existuje práve $\binom{n-1}{m_1-1}$ vektorov $\bar{\beta}^{(1)}$ s vlastnosťou $\bar{\alpha} \preccurlyeq \bar{\beta}^{(1)}$ a teda aj vektorov $\beta^{(1)}$ s vlastnosťou $\alpha \preccurlyeq \beta^{(1)}$. Rovnako dostávame, že existuje práve $\binom{n-1}{m_2-1}$ vektorov $\beta^{(2)}$ s vlastnosťou $\alpha' \preccurlyeq \beta^{(2)}$. Ako vidieť, je možné realizovať oba výbery nezávisle. Z toho vyplýva, že ak $|\alpha - \alpha'| = 1$ existuje práve $\binom{n-1}{m_1-1}\binom{n-1}{m_2-1}$ dvojíc grafov (H_1, H_2) pre dané α, α' takých, že $|H_1 \cap H_2| = 2$.

Analogicky, ak budeme uvažovať, že $\alpha + e_k \preccurlyeq \beta^{(1)}$, ale $\alpha \not\preccurlyeq \beta^{(2)}$, potom musí platiť, že $\beta_k^{(1)} = *$, ale $\beta_k^{(2)} = \alpha'_k = 1 - \alpha_k \neq \alpha_k$, aby $\alpha \not\preccurlyeq \beta^{(2)}$. Z toho vieme, že $H_1 \cap H_2 = \{\alpha + e_k\}$, a teda $|H_1 \cap H_2| = 1$. Po odstránení k-tej súradnice bude platiť, že $D(\beta^{(1)}) = m_1 - 1$, ale $D(\beta^{(2)}) = m_2$. Potom počet dvojíc (H_1, H_2) pre dané α, α' v tomto prípade bude práve $\binom{n-1}{m_1-1}\binom{n-1}{m_2}$. Obdobne aj pre prípad, kedy $\alpha + e_k \not\preccurlyeq \beta^{(1)}$ a $\alpha \preccurlyeq \beta^{(2)}$, bude počet dvojíc (H_1, H_2) pre dané α, α' rovný $\binom{n-1}{m_1}\binom{n-1}{m_2-1}$.

Nakoniec potrebujeme určiť počet rôznych dvojíc α, α' tak, aby $|\alpha-\alpha'| = 1$. Nech α je ľubovoľný vrchol z $V(E_n)$. Potom existuje práve n vrcholov $\alpha' = \alpha + e_k$, kde $k \in \{1, \dots, n\}$ takých, že $|\alpha - \alpha'| = 1$. Spolu môžeme povedať, že počet takých dvojíc α, α' je práve $n|V(E_n)| = n2^n$.

Spojením oboch prípadov predchádzajúceho rozboru môžeme vyjadriť príspevok do $G_{n,m}$ pre dvojice (H_1, H_2) také, že $|\alpha - \alpha'| = 1$ ako:

$$\sum_{\substack{H_1 \in^{(3)} E_{m_1}, H_2 \in^{(3)} E_{m_2} \\ |\alpha-\alpha'|=1}} (p_n^{-|H_1 \cap H_2|} - 1) = 2^n n \binom{n-1}{m_1-1}\binom{n-1}{m_2-1}(p_n^{-2} - 1) +$$

$$+2^n n \left[\binom{n-1}{m_1}\binom{n-1}{m_2-1} + \binom{n-1}{m_1-1}\binom{n-1}{m_2}\right](p_n^{-1} - 1)$$

Nech $|\alpha - \alpha'| = 2$. Potom existuje k, l také, že $\alpha' = \alpha + e_k + e_l$. Z lemy 3.33 vieme, že $H_1 \cap H_2 \subseteq B(\alpha) \cap B(\alpha') = \{\alpha + e_k, \alpha + e_l\}$. Predpokladajme, že $\alpha + e_k, \alpha + e_l \preccurlyeq \beta^{(1)}$ a $\alpha + e_k, \alpha + e_l \preccurlyeq \beta^{(2)}$. Potom $H_1 \cap H_2 = \{\alpha + e_k, \alpha + e_l\}$, t.j. $|H_1 \cap H_2| = 2$. Vieme, že $\alpha \preccurlyeq \beta^{(1)}$ a $\alpha + e_k + e_l = \alpha' \preccurlyeq \beta^{(2)}$. Z toho môžeme usúdiť, že $\beta_k^{(1)} = \beta_l^{(1)} = \beta_k^{(2)} = \beta_l^{(2)} = *$. Podobne ako v predošlom prípade odoberieme zo všetkých spomenutých vektorov k-tú a l-tú súradnicu a na základe lemy 3.15 vieme, že existuje práve $\binom{n-2}{m_1-2}$ vektorov $\beta^{(1)}$ a $\binom{n-2}{m_2-2}$ vektorov $\beta^{(2)}$.

Predpokladajme inak, že $\alpha+e_k, \alpha+e_l \preccurlyeq \beta^{(1)}$ a $\alpha+e_k \preccurlyeq \beta^{(2)}$, ale $\alpha+e_l \not\preccurlyeq \beta^{(2)}$. Potom $H_1 \cap H_2 = \{\alpha + e_k\}$, čiže $|H_1 \cap H_2| = 1$. Podobne ako predtým dôjdeme k tomu, že musí platiť, že $\beta_k^{(1)} = \beta_l^{(1)} = \beta_k^{(2)} = *$, ale $\beta_l^{(2)} = \alpha_l'$. Opäť odobratím súradníc k a l dostávame, že existuje práve $\binom{n-2}{m_1-2}$ vektorov $\beta^{(1)}$ a $\binom{n-2}{m_2-1}$ vektorov $\beta^{(2)}$. To isté platí aj keď uvažujeme $\alpha + e_l \preccurlyeq \beta^{(2)}$ a $\alpha + e_k \not\preccurlyeq \beta^{(2)}$.

Úplne rovnakou úvahou môžeme pokračovať, aj keď $\alpha + e_k, \alpha + e_l \preccurlyeq \beta^{(2)}$ a $\alpha + e_k \preccurlyeq \beta^{(1)}$, ale $\alpha + e_l \not\preccurlyeq \beta^{(1)}$, resp. keď $\alpha + e_l \preccurlyeq \beta^{(1)}$, ale $\alpha + e_k \not\preccurlyeq \beta^{(1)}$. Dostávame potom, že počet vektorov $\beta^{(1)}$ je $\binom{n-2}{m_1-1}$ a vektorov $\beta^{(2)}$ je $\binom{n-2}{m_2-2}$.

Nakoniec predpokladajme, že $\alpha + e_k \preccurlyeq \beta^{(1)}$, $\alpha + e_k \preccurlyeq \beta^{(2)}$, ale $\alpha + e_l \not\preccurlyeq \beta^{(1)}$ a $\alpha + e_l \not\preccurlyeq \beta^{(2)}$. Potom $|H_1 \cap H_2| = 1$. Zopakovaním predošlých krokov dostávame, že existuje $\binom{n-2}{m_1-1}$ vektorov $\beta^{(1)}$ a $\binom{n-2}{m_2-1}$ vektorov $\beta^{(2)}$.

Potrebujeme ešte zistiť počet rôznych dvojíc α, α' tak, aby $|\alpha - \alpha'| = 2$. Ku každému vektoru α existuje práve $\binom{n}{2}$ vektorov $\alpha' = \alpha + e_k + e_l$, kde $k \neq l$, pre ktoré potom platí, že $|\alpha - \alpha'| = 2$. Z toho vyplýva, že počet dvojíc vektorov α, α' bude rovný práve $2^n\binom{n}{2}$.

Zhrnieme uvedený rozbor a vyjadríme počet dvojíc grafov (H_1, H_2), pre ktoré $|\alpha - \alpha'| = 2$ vo forme príspevku do $G_{n,m}$:

$$\sum_{\substack{H_1 \in^{(3)} E_{m_1}, H_2 \in^{(3)} E_{m_2} \\ |\alpha-\alpha'|=2}} (p_n^{-|H_1 \cap H_2|} - 1) = 2^n \binom{n}{2}\binom{n-2}{m_1-2}\binom{n-2}{m_2-2}(p_n^{-2} - 1) +$$

$$+2^n\binom{n}{2}2\left[\binom{n-2}{m_1-1}\binom{n-2}{m_2-2}+\binom{n-2}{m_1-2}\binom{n-2}{m_2-1}+ \right.$$
$$\left.+\binom{n-2}{m_1-1}\binom{n-2}{m_2-1}\right](p_n^{-1}-1)$$

Spojením všetkých troch prípadov rozboru a úpravou dostávame:

$$^{(3,3)}S_{(m_1,m_2)} = \sum_{d=1}^{\min\{m_1,m_2\}+1} 2^n\binom{n}{m_1}\binom{m_1}{d-1}\binom{n-m_1}{m_2-d+1}(p_n^{-d}-1)+$$
$$+2^n\binom{n}{m_1}\left[m_1\binom{n-1}{m_2-1}+\binom{m_1}{2}\binom{n-2}{m_2-2}\right](p_n^{-2}-1)+$$
$$+2^n\binom{n}{m_1}\left[m_1\binom{n-1}{m_2}+(n-m_1)\binom{n-1}{m_2-1}+\right.$$
$$\left.+m_1(n-m_1)\binom{n-1}{m_2-1}+m_1(m_1-1)\binom{n-2}{m_2-1}\right](p_n^{-1}-1)$$

Prípad $(^{(3)}E_{m_1}, {}^{(4)}E_{m_2})$

Nech $H_1 \in {}^{(3)}E_{m_1}$, $H_2 \in {}^{(4)}E_{m_2}$. Potom existuje $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ a $\alpha \in E(\beta^{(1)})$, $\alpha' \in E(\beta^{(2)})$ také, že $H_1 = E(\beta^{(1)}) \cap B(\alpha)$ a $H_2 = E(\beta^{(2)}) \cap C(\alpha')$. Potom $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap B(\alpha) \cap C(\alpha')$. Nech $d = D(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$.

Na základe faktu, že $C(\alpha') = B(\alpha') \backslash \{\alpha'\}$, môžeme hľadaný výraz jednoducho odvodiť z predošlého rozboru. Ak $\alpha = \alpha'$, tak $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap B(\alpha) \cap C(\alpha) = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap C(\alpha)$. Na základe toho vieme usúdiť, že počet takýchto dvojíc grafov (H_1, H_2) bude zhodný s tým v prvej časti prípadu $(^{(1)}E_{m_1}, {}^{(4)}E_{m_2})$,keď $\alpha \in E(\beta^{(1)})$.

Ak $|\alpha - \alpha'| = 1$, potom $H_1 \cap H_2 \subseteq \{\alpha, \alpha'\} \backslash \{\alpha'\} = \{\alpha\}$. Rovnosť v predošlom výraze nastáva práve vtedy, keď $\alpha \in E(\beta^{(2)})$, t.j. $\alpha \preccurlyeq \beta^{(2)}$. Z rozboru prípadu $(^{(3)}E_{m_1}, {}^{(3)}E_{m_2})$ vieme potom usúdiť, že existuje práve $\binom{n}{m_1}$ vektorov $\beta^{(1)}$ a $\binom{n-1}{m_2-1}$ vektorov $\beta^{(2)}$, ktoré spĺňajú uvedenú podmienku.

Ak $|\alpha - \alpha'| = 2$, a teda $\alpha' = \alpha + e_k + e_l$, potom $H_1 \cap H_2 \subseteq \{\alpha + e_k, \alpha + e_l\} \backslash \{\alpha'\} = \{\alpha + e_k, \alpha + e_l\}$. To však platilo aj v prípade $(^{(3)}E_{m_1}, {}^{(3)}E_{m_2})$, keď $|\alpha - \alpha'| = 2$. To znamená, že hľadaný počet dvojíc bude totožný.

Na základe uvedeného rozboru môžeme vyjadriť príspevok do $G_{n,m}$ ako:

$$^{(3,4)}S_{(m_1,m_2)} = \sum_{d=1}^{\min\{m_1,m_2\}} 2^n\binom{n}{m_1}\binom{m_1}{d}\binom{n-m_1}{m_2-d}(p_n^{-d}-1)+$$
$$+2^n\binom{n}{m_1}\binom{m_1}{2}\binom{n-2}{m_2-2}(p_n^{-2}-1)+2^n\binom{n}{m_1}\left[n\binom{n-1}{m_2-1}\right.$$
$$\left.+m_1(n-m_1)\binom{n-1}{m_2-1}+m_1(m_1-1)\binom{n-2}{m_2-1}\right](p_n^{-1}-1)$$

Prípad $({}^{(4)}E_{m_1}, {}^{(4)}E_{m_2})$

Nech $H_1 \in {}^{(4)}E_{m_1}$, $H_2 \in {}^{(4)}E_{m_2}$. Potom existuje $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in V_n^*$ a $\alpha \in E(\beta^{(1)})$, $\alpha' \in E(\beta^{(2)})$ také, že $H_1 = E(\beta^{(1)}) \cap C(\alpha)$ a $H_2 = E(\beta^{(2)}) \cap C(\alpha')$. Potom $H_1 \cap H_2 = E(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)}) \cap C(\alpha) \cap C(\alpha')$. Nech $d = D(\beta^{(1)} \odot \beta^{(2)})$.

Úplne analogicky ako v predošlom prípade, ak $\alpha = \alpha'$, tak počet dvojíc (H_1, H_2) je zhodný s tým v prvej časti prípadu $({}^{(1)}E_{m_1}, {}^{(4)}E_{m_2})$, ak $|\alpha - \alpha'| = 1$ tak $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, takže tento prípad nie je potrebné ani uvažovať a ak $|\alpha - \alpha'| = 2$, a teda $\alpha' = \alpha + e_k + e_l$, tak $H_1 \cap H_2 \subseteq \{\alpha + e_k, \alpha + e_l\}$, čo je opäť zhodné s prípadom $({}^{(3)}E_{m_1}, {}^{(3)}E_{m_2})$, keď $|\alpha - \alpha'| = 2$.

Môžeme preto rovno vyjadriť počet dvojíc grafov (H_1, H_2) v tvare príspevku do $G_{n,m}$:

$$
\begin{aligned}
{}^{(4,4)}S_{(m_1,m_2)} = &\sum_{d=1}^{\min\{m_1,m_2\}} 2^n \binom{n}{m_1}\binom{m_1}{d}\binom{n-m_1}{m_2-d}(p_n^{-d} - 1) + \\
&+2^n \binom{n}{m_1}\binom{m_1}{2}\binom{n-2}{m_2-2}(p_n^{-2} - 1) + 2^n \binom{n}{m_1}\Bigg[\\
&\qquad +m_1(n-m_1)\binom{n-1}{m_2-1} + m_1(m_1-1)\binom{n-2}{m_2-1}\Bigg](p_n^{-1} - 1)
\end{aligned}
$$

4.2 Zhrnutie

Na základe predošlého obsiahleho rozboru všetkých typov prienikov, ktoré sa v polenej hyperkocke E_n nachádzajú môžeme konečne pristúpiť k vyjadreniu $G_{n,m}$.

Ako už bolo uvedené na základe definície $G_{n,m}$, môžeme túto funkciu vyjadriť ako 4.1, čo vieme rozpísaním podľa jednotlivých typov podgrafov taktiež zapísať ako

$$
\begin{aligned}
G_{n,m} = &{}^{(1,1)}S_{(m,m)} + {}^{(2,2)}S_{(m+1,m+1)} + {}^{(3,3)}S_{(2^m-1,2^m-1)} + {}^{(4,4)}S_{(2^m,2^m)} + \\
&+ 2\Big({}^{(1,2)}S_{(m,m+1)} + {}^{(1,3)}S_{(m,2^m-1)} + {}^{(1,4)}S_{(m,2^m)} + \\
&\qquad + {}^{(2,3)}S_{(m,2^m-1)} + {}^{(2,4)}S_{(m,2^m)} + {}^{(3,4)}S_{(2^m-1,2^m)}\Big)
\end{aligned}
$$

Dosadíme do vyjadrenia vypočítané výrazy a po úprave dostávame tvrdenie:

Lema 4.2. *Pre funkciu $G_{n,m}$ definovanú podľa 4.1 platí:*

$$\begin{aligned}
G_{n,m}(p_n) \;=\; & \sum_{d=0}^{m} 2^{n-d}\binom{n+1}{m+1}\binom{m+1}{d+1}\binom{n-m}{m-d}(p_n^{-2^d}-1) \;+ \\
& + 2\sum_{d=0}^{m+1} 2^{n}\binom{n+1}{m+1}\binom{m+1}{d}\binom{n-m}{2^m-d}(p_n^{-d}-1) + \\
& + \sum_{d=0}^{2^m} 2^{n}\binom{n+1}{2^m}\binom{2^m}{d}\binom{n-2^m+1}{2^m-d}(p_n^{-d}-1) + \\
& + 2^n\binom{n+1}{2^m}\binom{2^m}{2}\binom{n-1}{2^m-2}(p_n^{-2}-1) + \\
& + 2^n\binom{n+1}{2^m}\binom{2^m}{1}\left[2\binom{n}{m+1} + \right. \\
& \qquad \left. + 2^m\binom{n}{2^m} + (2^m-1)\binom{n-1}{2^m-1}\right](p_n^{-1}-1) + \\
& + 2^n\binom{n+1}{m+1}\binom{n-m}{m+1}(p_n^{-1}-1)
\end{aligned}$$

4.3 Dodatok

V ďalšom postupe bude užitočné vedieť, aká je veľkosť súčtu veľkostí prienikov všetkých uvažovaných podgrafov. Naviac sa ukáže, že existuje uzavretá formula pre uvedenú hodnotu.

Ľahko nahliadneme (s využitím definície 4.1), že platí nasledujúca identita:

$$\sum_{\substack{H_1,H_2\in^{(1)}E_m\cup^{(2)}E_{m+1}\cup \\ \cup^{(3)}E_{2^m-1}\cup^{(4)}E_{2^m}}} |H_1\cap H_2| = -\frac{\partial G_{n,m}(p_n)}{\partial p_n}\Bigg|_{p_n=1}$$

Využijúc predchádzajúce vyjadrenie $G_{n,m}(p_n)$ počítame:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial G_{n,m}(p_n)}{\partial p_n}\Bigg|_{p_n=1} = {} & 2^n\binom{n+1}{m+1}\sum_{d=0}^{m}\binom{m+1}{d+1}\binom{n-m}{m-d} + 2^{n+1}\binom{n+1}{m+1}\times \\
& \times \sum_{d=0}^{m+1} d\binom{m+1}{d}\binom{n-m}{2^m-d} + 2^n\binom{n+1}{2^m}\sum_{d=0}^{2^m} d\binom{2^m}{d}\binom{n-2^m+1}{2^m-d} + \\
& + 2^n\binom{n+1}{2^m}2^m(2^m-1)\binom{n-1}{2^m-2} + 2^{n+1}\binom{n+1}{2^m}2^m\binom{n}{m+1} + 2^n\binom{n+1}{2^m}\times \\
& \times\left[2^m 2^m\binom{n}{2^m} + 2^m(2^m-1)\binom{n-1}{2^m-1}\right] + 2^n\binom{n+1}{m+1}\binom{n-m}{m+1} =
\end{aligned}$$

$$= 2^n\binom{n+1}{m+1}^2 - 2^n\binom{n+1}{m+1}\binom{n-m}{m+1} + 2^{n+1}\binom{n}{m}2^m\binom{n+1}{2^m} +$$

$$+ 2^{n+1}\binom{n}{m+1}2^m\binom{n+1}{2^m} + 2^n\binom{n+1}{2^m}2^m\binom{n}{2^m-1} + 2^n\binom{n+1}{2^m} \times$$

$$\times 2^m(2^m-1)\binom{n}{2^m-1} + 2^n\binom{n+1}{2^m}(2^m)^2\binom{n}{2^m} + 2^n\binom{n+1}{m+1}\binom{n-m}{m+1} =$$

$$= 2^n\binom{n+1}{m+1}^2 + 2\times 2^n\binom{n+1}{m+1}2^m\binom{n+1}{2^m} + 2^n(2^m)^2\binom{n+1}{2^m}^2$$

Z toho záverom dostávame tvrdenie:

Veta 4.3. *Súčet veľkostí všetkých prienikov podkociek rozmeru m v E_n je:*

$$\sum_{\substack{H_1,H_2\in^{(1)}E_m\cup^{(2)}E_{m+1}\cup\\ \cup^{(3)}E_{2^m-1}\cup^{(4)}E_{2^m}}} |H_1\cap H_2| = 2^n\left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m\binom{n+1}{2^m}\right]^2$$

Kapitola 5

Pravdepodobnostné metódy

V tejto kapitole si všeobecne popíšeme pravdepodobnostný priestor a náhodné premenné, ktoré budeme v ďalšom skúmať. Naviac popíšeme a dokážeme všeobecne platiace vlastnosti, ktoré sú priamo aplikovateľné na nami skúmané štruktúry. Na demonštráciu na konci kapitoly popíšeme špecifické vlastnosti obyčajných hyperkociek, kompletných grafov a samozrejme polených hyperkociek získané pomocou aplikácie výsledkov uvedených v tejto kapitole.

5.1 Náhodné podmnožiny

Na začiatok si zavedieme potrebné pojmy.

Definícia 5.1. Nech U je neprázdna množina objektov. Definujeme A ako množinu vybraných podmnožín U, t.j. $A \subseteq 2^U$. Ďalej nech existuje $p \in < 0, 1 >$ určujúce pravdepodobnosť výskytu prvku z U v ľubovoľnom výbere prvkov z U, t.j.

$$P(x \in X) = p$$

kde $x \in U$ a $X \subseteq U$ a navyše výber dvoch rôznych prvkov je nezávislý, t.j.

$$P(x \in X \wedge y \in X) = P(x \in X)P(y \in X)$$

pre $x, y \in U, x \neq y$.

Lema 5.2. *Pre ľubovoľnú podmnožinu $H \subseteq U$ platí*

$$P(H = X) = \prod_{x \in H} p \prod_{x \notin H} (1 - p) = p^{|H|}(1 - p)^{|U|-|H|}$$

$$P(H \subseteq X) = \prod_{x \in H} P(x \in X) = \prod_{x \in H} p = p^{|H|}$$

Dôkaz. Zrejmý z definície p. $\square$

Definícia 5.3. Pod pravdepodobnostným priestorom $\mathcal{S}$ budeme rozumieť trojicu $\mathcal{S} = (2^U, 2^{2^U}, P)$, kde U je množina z definície 5.1 a P je pravdepodobnostná funkcia definovaná na prvkoch $H \in 2^U$ podľa lemy 5.2.

Definícia 5.4. Náhodnou premennou ξ definovanou na pravdepodobnostnom priestore $\mathcal{S}$ budeme rozumieť funkciu $2^U \to R$ určujúcu počet všetkých prvkov z A obsiahnutých vo zvolenom výbere $G \subseteq U$, t.j.

$$\xi(G) = |\{H \mid H \in A \ \wedge \ H \subseteq G\}|$$

Náhodnou premennou $\kappa_H : 2^U \to R$ budeme rozumieť náhodnú premennú určujúcu, či množina H je obsiahnutá vo výbere $G \subseteq U$, t.j.

$$\kappa_H(G) = \begin{cases} 1 & H \subseteq G \\ 0 & inak \end{cases}$$

Z uvedeného vidieť, že sa dá náhodná premenná ξ zapísať ako suma premennej κ_H cez všetky prvky z A, t.j.

$$\xi = \sum_{H \in A} \kappa_H$$

Lema 5.5. *Pre strednú hodnotu náhodnej premennej ξ platí nasledovné:*

$$|A|p^{h_h} \leq E(\xi) \leq |A|p^{h_l}$$

kde $h_l = \min_{H \in A} |H|$ *a* $h_h = \max_{H \in A} |H|$.

Dôkaz. Počítajme strednú hodnotu ξ:

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sum_{G \in 2^U} \sum_{H \in A} \kappa_H(G) P(G = X) = \sum_{H \in A} \sum_{\substack{G \in 2^U \\ H \subseteq G}} P(G = X) \\ &= \sum_{H \in A} P(H \subseteq X) = \sum_{H \in A} p^{|H|} \end{aligned}$$

Z toho dostávame hľadané nerovnosti. □

Lema 5.6. *Pre disperziu náhodnej premennej ξ platí nasledovné tvrdenie:*

$$D(\xi) \leq (p^{-h_h} - 1)E^2(\xi)$$

Dôkaz. Počítajme disperziu náhodnej premennej ξ (využijeme, že platí vzťah $D(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$):

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \sum_{H_1 \in A} \sum_{H_2 \in A} \sum_{G \in 2^U} \kappa_{H_1} \kappa_{H_2} P(G = X) = \sum_{H_1, H_2 \in A} \sum_{\substack{G \in 2^U \\ H_1 \subseteq G \\ H_2 \subseteq G}} P(G = X) \\ &= \sum_{H_1, H_2 \in A} P(H_1 \cup H_2 \subseteq X) = \sum_{H_1, H_2 \in A} p^{|H_1| + |H_2| - |H_1 \cap H_2|} \end{aligned}$$

$$E^2(\xi) = \left(\sum_{H \in A} p^{|H|} \right)^2 = \sum_{H_1, H_2 \in A} p^{|H_1| + |H_2|}$$

$$D(\xi) \quad = \sum_{H_1,H_2\in A} p^{|H_1|+|H_2|}(p^{-|H_1\cap H_2|}-1) \leq (p^{-h_h}-1)\sum_{H_1,H_2\in A} p^{|H_1|+|H_2|}$$

Z toho, že $|H_1 \cap H_2| \leq |H_1| \leq h_h$ a funkcia $p^{-i}-1$ je neklesajúca pre i, dostávame hľadané tvrdenie. □

Lema 5.7. *Predpokladajme, že pre* $\alpha > 1$ *platí*

$$\alpha\frac{1}{h_h}\sum_{H_1,H_2\in A}|H_1\cap H_2| \leq |A|^2$$

potom pre disperziu náhodnej premennej ξ *platí:*

$$D(\xi) \leq \frac{1}{\alpha}(p^{-h_h}-1)p^{2h_l}|A|^2$$

Dôkaz. Z dôkazu lemy 5.6 dostávame:

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \sum_{H_1,H_2\in A} p^{|H_1|+|H_2|}(p^{-|H_1\cap H_2|}-1) \\ &\leq p^{2h_l}\sum_{H_1,H_2\in A}|H_1\cap H_2|\frac{(p^{-|H_1\cap H_2|}-1)}{|H_1\cap H_2|} \\ &\leq p^{2h_l}\frac{(p^{-h_h}-1)}{h_h}\sum_{H_1,H_2\in A}|H_1\cap H_2| \;\leq\; p^{2h_l}\frac{(p^{-h_h}-1)}{h_h}\frac{h_h}{\alpha}|A|^2 \end{aligned}$$

Na základe toho, že funkcia $\frac{p^{-i}-1}{i}$ je neklesajúca pre i, dostávame hľadané tvrdenie. □

Uvedená lema nenaznačuje priamo, aké je jej použitie, avšak sa dá ukázať, že podmienka tejto lemy je splnená s rovnosťou pre

$$\alpha = \frac{|U|}{h_h}$$

ak za uvedenú množinu U uvažujeme vrcholy, resp. hrany hyperkocky Q_n, resp. polenej hyperkocky E_n, resp. kompletného grafu K_n a množinu A tvoria všetky vnorené izomorfné obrazy hyperkocky Q_m, resp. polenej hyperkocky E_m, resp. kompletného grafu K_m.

Podobne ako v leme 5.7 by sa teoreticky dalo pre určitú triedu štruktúr nájsť aj silnejšie tvrdenie pre odhad disperzie ξ. Ostáva však otvorené, či podmienka stanovená v tejto leme nie je splniteľná z špecifickejších predpokladov kladených na charakter štruktúry A.

V ďalšom odvodíme použitím predošlých pomocných liem a Čebyševovej nerovnosti odhad hodnôt náhodnej premennej ξ:

Veta 5.8. *(Čebyševova) Nech* X *je náhodná premenná a* $\varepsilon > 0$ *potom platí:*

$$P(|X-E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Veta 5.9. *Nech* $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je systém množín. Nech* $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je systém systémov podmnožín prvkov systému* U_n*. Nech* $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych hodnôt z intervalu* $< 0,1 >$*. Nech* $\mathcal{S}_n = (2^{U_n}, 2^{2^{U_n}}, P)$ *je pravdepodobnostný priestor pre pravdepodobnosť* P *definovanú pre všetky prvky z* 2^{U_n} *podľa definície 5.3 pre* $p = p_n$*. Potom nech* $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je systém náhodných premenných definovaný na príslušnom pravdepodobnostnom priestore* $\mathcal{S}_n$ *určujúci počet prvkov príslušnej* A_n *obsiahnutých v zvolenom* $G \subseteq U_n$*. Nech* $\varphi(n)$ *je reálna funkcia, pre ktorú platí* $\lim_{n\to\infty} \varphi^2(n) = \infty$*. Nech* $h_h(n) = \max_{H\in A_n} |H|$*.*

Potom pre n *idúce do nekonečna platí pre hodnoty náhodnej premennej* ξ_n *nasledujúce:*

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(|\xi_n - E(\xi_n)| < \varepsilon(n)\Big) = 1$$

kde $\varepsilon(n) = E(\xi_n)\varphi(n)\sqrt{p_n^{-h_h(n)} - 1}$

Dôkaz. Počítajme $\frac{D(\xi_n)}{\varepsilon^2(n)}$

$$\frac{D(\xi_n)}{\varepsilon^2(n)} \le \frac{(p_n^{-h_h(n)} - 1)E^2(\xi_n)}{\left(E(\xi_n)\varphi(n)\sqrt{p_n^{-h_h(n)} - 1}\right)^2} = \frac{1}{\varphi^2(n)} \longrightarrow 0$$

Z Čebyševovej nerovnosti dostávame:

$$P\Big(|\xi_n - E(\xi_n)| < \varepsilon(n)\Big) = 1 - P\Big(|\xi_n - E(\xi_n)| \ge \varepsilon(n)\Big) \ge 1 - \frac{1}{\varphi^2(n)} \longrightarrow 1$$

Z čoho dostávame hľadané tvrdenie. □

Dôsledok 5.10. *Nech sú splnené predpoklady vety 5.9 a lemy 5.7. Nech naviac* $h_l(n) = \min_{H\in A_n} |H|$*. Potom pre* n *idúce do nekonečna pre hodnoty náhodnej premennej* ξ_n *platí:*

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(|\xi_n - E(\xi_n)| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varepsilon'(n)\Big) = 1$$

kde $\varepsilon'(n) = p_n^{h_l(n)}|A_n|\varphi(n)\sqrt{p_n^{-h_h(n)} - 1}$

Dôkaz. Rovnakým spôsobom ako dôkaz vety 5.14 naviac s využitím platnosti lemy 5.7. □

Definícia 5.11. Nech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je ľubovoľná funkcia. Potom definujme

$$A_m = \{H \mid H \in A \wedge |H| = f(m)\}$$

Nech ξ_m je náhodná premenná určujúca počet prvkov z A_m, ktoré sú obsiahnuté vo výbere $G \subseteq U$, t.j.

$$\xi_m(G) = |\{H \mid H \in A_m \;\wedge\; H \subseteq G\}|$$

Lema 5.12. *Pre náhodnú premennú ξ_m platí:*

$$E(\xi_m) = p^{f(m)}|A_m|$$

$$D(\xi_m) \leq (p^{-f(m)} - 1)E^2(\xi_m)$$

Dôkaz. Z lemy 5.5 a 5.6. □

Na ďalšie úvahy budeme potrebovať známu Markovovu nerovnosť:

Veta 5.13. *(Markovova) Nech X je nezáporná náhodná premenná, $X \geq 0$. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľná kladná konštanta. Potom platí*

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

Veta 5.14. *Nech sú splnené predpoklady vety 5.9. Nech pre každé $H \in A_n$ platí $|H| = f(m)$. Označme si takéto množiny $A_{n,m}$. Analogicky si označme náhodné premenné $\xi_{n,m}$. Nech $\varphi'(n)$ je ľubovoľná funkcia, pre ktorú platí $\lim_{n\to\infty} \varphi'(n) = \infty$. Potom pre n idúce do nekonečna pre*

$$f(m) \geq \left\lceil \log_{\frac{1}{p}} |A_{n,m}|\varphi'(n) \right\rceil$$

platí:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\xi_{n,m} = 0\right) = 1$$

Dôkaz. Upravíme podmienku pre m:

$$\begin{aligned} f(m) &\geq \log_{\frac{1}{p}} \left(|A_{n,m}|\varphi'(n)\right) \\ \left(\frac{1}{p}\right)^{f(m)} &\geq |A_{n,m}|\varphi'(n) \\ \frac{1}{\varphi'(n)} &\geq |A_{n,m}|p^{f(m)} = E(\xi_{n,m}) \end{aligned}$$

Výraz na ľavej strane klesá k 0, ak n ide do nekonečna. Dostávame teda, že $\lim_{n\to\infty} E(\xi_{n,m}) = 0$. Použitím Markovovej nerovnosti pre $\varepsilon > 0$ dostávame:

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_{n,m} \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{E(\xi_{n,m})}{\varepsilon} = 0$$

Z toho už zrejme vyplýva hľadané tvrdenie. □

Dôsledok 5.15. *Nech platia predpoklady vety 5.14. Predpokladajme naviac, že funkcia f je neklesajúca. Definujme funkciu $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ ako*

$$f^{-1}(x) = \min\{n \mid f(n) \geq x\}$$

Potom pre n idúce do nekonečna a

$$m \geq f^{-1}\Big(\log_{\frac{1}{p}} |A_{n,m}|\varphi'(n)\Big)$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_{n,m} = 0) = 1$$

Dôkaz. Predpokladajme, že existuje také $k \in \mathbb{N}$, že $f^{-1}\Big(\log_{\frac{1}{p}} |A_{n,m}|\varphi'(n)\Big) = k$, potom

$$f(k) \geq \Big\lceil \log_{\frac{1}{p}} |A_{n,m}|\varphi'(n) \Big\rceil$$

(lebo $x \leq n \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leq n$). Z toho, že funkcia f je neklesajúca a $m \geq k$ dostávame $f(m) \geq f(k)$ a z platnosti vety 5.14 získavame hľadané tvrdenie. □

5.2 Maximálne množiny

V predošlej časti sme zistili, že pomocou náhodných premenných κ_H určujúcich príslušnosť danej množiny H vo vybranej podmnožine $G \subseteq U$ môžeme skonštruovať náhodnú premennú určujúcu počet takýchto množín vyberaných zo zvolenej množiny A obsiahnutých v spomínanom G.

Podobným spôsobom je možné vyjadriť náhodnú premennú, ktorá bude určovať počet takýchto množín z A obsiahnutých vo vybranej podmnožine $G \subseteq U$, ktoré sú naviac tzv. maximálne.

Definícia 5.16. Nech $G \in 2^U$. Množinu $H \in A$ budeme nazývať *maximálna pre* G, ak $H \subseteq G$ a neexistuje množina $H' \in A$, ktorá by bola nadmnožinou H taktiež obsiahnutá v G, t.j.

$$(\forall H' \in A)\ H \subsetneq H' \Longrightarrow H' \nsubseteq G$$

To znamená, že pre dané $H' \supseteq H$ musí platiť $\kappa_{H'}(G) = 0$ a to znamená, že $1 - \kappa_{H'}(G) = 1$. Z toho dostávame, že

$$\prod_{\substack{H' \in A \\ H' \supsetneq H}} (1 - \kappa_{H'}(G)) = 1$$

Naviac musí platiť, že H je obsiahnuté v G, t.j. $\kappa_H(G) = 1$. Keď to zhrnieme dostávame:

Definícia 5.17. Náhodná premenná ν určujúca počet maximálnych množín v zvolenej podmnožine $G \subseteq U$ je definovaná nasledovne:

$$\nu = \sum_{H \in A} \kappa_H \prod_{\substack{H' \in A \\ H' \supsetneq H}} (1 - \kappa_{H'})$$

Definícia 5.18. Náhodná premenná $\hat{\kappa}_H$ je definovaná tak, že určuje, či zvolená množina H je maximálnou v zvolenej podmnožine $G \subseteq U$, t.j.

$$\hat{\kappa}_H = \kappa_H \prod_{\substack{H' \in A \\ H' \supsetneqq H}} (1 - \kappa_{H'})$$

Z definície vyplýva, že platí

$$\nu = \sum_{H \in A} \hat{\kappa}_H$$

Lema 5.19. *Nech $H, H' \in A$; $H \subseteq H'$ sú ľubovoľné množiny . Potom platí*

$$(1 - \kappa_H)(1 - \kappa_{H'}) = (1 - \kappa_H)$$

Dôkaz. Rozpíšeme si ľavú stranu rovnosti. $(1 - \kappa_H)(1 - \kappa_{H'}) = 1 + \kappa_H \kappa_{H'} - \kappa_H - \kappa_{H'}$. Z toho, že $H \subseteq H'$ je zrejmé, že ak $\kappa_{H'} = 1$, tak platí aj $\kappa_H = 1$. Čiže ak $\kappa_{H'} = 1$, tak $\kappa_{H'} \kappa_H = 1$ a ak $\kappa_{H'} = 0$, tak zrejme aj $\kappa_{H'} \kappa_H = 0$. Z toho dostávame, že platí $\kappa_{H'} = 1 \iff \kappa_H \kappa_{H'} = 1$, čiže $\kappa_H \kappa_{H'} = \kappa_{H'}$. Dosadíme do rovnosti a dostávame: $1 + \kappa_{H'} \kappa_H - \kappa_{H'} - \kappa_H = 1 + \kappa_{H'} - \kappa_{H'} - \kappa_H = 1 - \kappa_H$, čím je uvedená rovnosť dokázaná. ☐

Z tejto lemy vidieť, že je možné eliminovať vhodné činitele súčinu z definície 5.17. Tým môžeme v súčine uvažovať len tie nadmnožiny H, ktoré neobsahujú žiadne podmnožiny, ktoré by boli zároveň vlastnými nadmnožinami H (t.j. všetky najmenšie možné vlastné nadmnožiny H).

Ďalej treba uvažovať, že ak H' a H'' sú nadmnožiny H, potom $H' \cap H'' \supseteq H$, lebo obe nadmnožiny obsahujú H, takže aj ich prienik. Vo všeobecnosti:

Definícia 5.20. Definujme T_H^0 ako množinu všetkých nadmnožín množiny H, ktoré sú prvkami A:

$$T_H^0 = \{ \ H' \mid H' \in A \ \wedge \ H' \supsetneqq H \ \}$$

Definujme T_H ako podmnožinu T_H^0, tak že

$$T_H = T_H^0 \setminus \{ \ H' \cup H'' \mid H', H'' \in T_H^0 \ \wedge \ H' \neq H'' \ \}$$

Nech t_H je veľkosť tejto množiny, t.j. $t_H = |T_H|$.

Lema 5.21. *Pre ľubovoľnú množinu $I \subseteq T_H$ nadmnožín množiny H platí*

$$\bigcap_{H' \in I} H' \supseteq H$$

Naviac neexistuje žiadne $H'' \in T_H$, ktoré je pod týmto prienikom, t.j. pre $|I| \geq 2$

$$\Big(\bigcap_{H' \in I} H' \supseteq H'' \supseteq H \Big) \Longrightarrow H'' \notin T_H$$

Dôkaz. Prvá časť tvrdenia je zrejmá. V druhej časti predpokladajme, že existuje $H'' \in T_H$ také, že $\bigcap_{H' \in I} H' \supseteq H''$. Potom pre ľubovoľné $H' \in I$, $H' \neq H''$ platí, $H' \supseteq H''$, ale aj $H' \cup H'' = H'$. Keďže $|I| \geq 2$, musí také H' existovať. Z toho dostávame $H' \notin T_H$, čo je spor s predpokladom $I \subseteq T_H$. □

Lema 5.22. *Pre náhodnú premennú ν platí:*

$$\nu = \sum_{H \in A} \kappa_H \prod_{H' \in T_H} (1 - \kappa_{H'})$$

Dôkaz. Nech pre nejaké $I \subseteq T_H^0$ platí

$$\hat{\kappa}_H = \kappa_H \prod_{H' \in I} (1 - \kappa_{H'}) \tag{5.1}$$

Nahliadnutím do definície je vidieť, že tvrdenie (5.1) platí pre $I = T_H^0$. Nech I je najmenšie možné spĺňajúce vlastnosť (5.1). Predpokladajme sporom, že $I \neq T_H$. Potom existuje $\hat{H} \in I \backslash T_H$. Z toho môžeme usúdiť, že existujú $H'', H''' \in T_H^0$ také, že $\hat{H} = H'' \cup H'''$, $H'' \neq H'''$. Na základe toho platí $H'' \subseteq \hat{H}$ a $\hat{H} \neq H''$ (ak by sa $\hat{H} = H''$ použijeme H'''). Ukážeme, že $H'' \in I$. Ak by každé H'' spĺňajúce predošlé predpoklady nebolo v I, tak platí $\hat{\kappa}_H(H'') = 0$, ale vieme, že platí:

$$\hat{\kappa}_H(H'') = \kappa_H(H'') \prod_{H'' \neq H' \in I} (1 - \kappa_{H'}(H'')) = 1$$

pretože ak by existoval $H'''' \in I$, že $\kappa_{H''''}(H'') = 1$, potom $H'''' \subseteq H''$ a keďže $H'' \subsetneqq \hat{H}$, potom $H'''' \cup \hat{H} = \hat{H}$, čiže $H'''', \hat{H}$ spĺňajú predpoklady výberu H'', H''', čo je spor s výberom H'' takého, že $H'' \notin I$. Z toho dostávame, že $H'' \in I$.

Podľa lemy 5.19 platí $(1 - \kappa_{\hat{H}})(1 - \kappa_{H''}) = (1 - \kappa_{H''})$. Z toho dostávame

$$\hat{\kappa}_H = \kappa_H \prod_{H' \in I \backslash \{\hat{H}\}} (1 - \kappa_{H'})$$

Z toho vidieť, že tvrdenie (5.1) platí aj pre $I \backslash \{\hat{H}\}$, čo je však spor s predpokladom, že I bolo najmenšie možné spĺňajúce (5.1). Tým dostávame, že $I = T_H$, čo sme potrebovali ukázať. □

Vyjadrime si teraz strednú hodnotu súčinu $\kappa_{H'}\kappa_{H''}$. Zrejme ľubovoľná množina G ,pre ktorú je $\kappa_{H'}(G)\kappa_{H''}(G) = 1$, musí obsahovať ako H', tak aj H''. Z toho ale vyplýva, že musí obsahovať aj $H' \cup H''$. Keďže každá nadmnožina $G \supseteq H' \cup H''$ spĺňa uvedenú vlastnosť dostávame, že $E(\kappa_{H'}\kappa_{H''}) = p^{|H' \cup H''|}$. Vo všeobecnosti:

Lema 5.23. *Nech $I \subseteq A$, potom pre strednú hodnotu súčinu náhodných premenných κ_H pre $H \in A$ platí:*

$$E(\prod_{H \in I} \kappa_H) = p^{|\bigcup_{H \in I} H|}$$

Dôkaz. Upravujme ľavú stranu rovnosti:

$$\begin{aligned} E(\prod_{H\in I}\kappa_H) &= \sum_{G\in 2^U}\prod_{H\in I}\kappa_H(G)P(G=X) = \sum_{\substack{G\in 2^U\\ \bigcup_{H\in I}H\subseteq G}} P(G=X) \\ &= P(\bigcup_{H\in I} H\subseteq X) \;=\; p^{|\bigcup_{H\in I}H|} \end{aligned}$$

Tým získame hľadané tvrdenie. ☐

Lema 5.24. *Nech $I\subseteq T_H$. Potom pre počet prvkov zjednotenia množín z I platí*

$$|H| + |I|(h_l^{T_H} - |H|) - \binom{|I|}{2}(h_h^{T_H^2} - |H|) \leq |\bigcup_{H'\in I} H'|$$

$$|\bigcup_{H'\in I} H'| \leq |H| + |I|(h_h^{T_H} - |H|)$$

kde $h_l^{T_H} = \min_{H'\in T_H}|H'|$, $h_h^{T_H} = \max_{H'\in T_H}|H'|$ *a* $h_h^{T_H^2} = \max_{H',H''\in T_H}|H'\cap H''|$

Dôkaz. Počítajme $|\bigcup_{H'\in I}H'|$. Z vety o zapojení a vypojení dostávame:

$$\begin{aligned} |\bigcup_{H'\in I} H'| &= |\bigcup_{H'\in I}(H\cup H'\backslash H)| = |H \cup \bigcup_{H'\in I} H'\backslash H| \\ &= |H| + |\bigcup_{H'\in I} H'\backslash H| \leq |H| + \sum_{H'\in I}|H'\backslash H| \leq \\ &\leq |H| + |I|(h_h^{T_H} - |H|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\bigcup_{H'\in I} H'| &\geq |H| + \sum_{H'\in I}|H'\backslash H| - \sum_{H'\in I}\sum_{\substack{H''\in I\\ H'\neq H''}}|H'\backslash H\cap H''\backslash H| \geq \\ &\geq |H| + |I|(h_l^{T_H} - |H|) + \binom{|I|}{2}|H| - \sum_{H'\in I}\sum_{\substack{H''\in I\\ H'\neq H''}}|H'\cap H''| \geq \\ &\geq |H| + |I|(h_l^{T_H} - |H|) - \binom{|I|}{2}(h_h^{T_H^2} - |H|) \end{aligned}$$

Z toho získavame hľadané odhady. ☐

Dôsledok 5.25. *Nech $I\subseteq T_H$. Nech pre každé $H',H''\in I$; $H'\neq H''$ platí $H'\cap H'' = H$, potom*

$$|I|(h_l^{T_H} - |H|) \leq |\bigcup_{H'\in I} H'| - |H| \leq |I|(h_h^{T_H} - |H|)$$

Dôkaz. Je zrejmé, že ak $H' \cap H'' = H$, potom $h_h^{T_H^2} = |H|$, čiže $h_h^{T_H^2} - |H| = 0$ a použitím lemy 5.24 dostávame hľadané tvrdenie. $\square$

Veta 5.26. *Nech pre každé $H', H'' \in T_H$ platí $H' \cap H'' = H$. Nech existuje konštanta h^{T_H} taká, že pre každé $H' \in T_H$ platí $|H'| = h^{T_H}$. Potom pre strednú hodnotu náhodnej premennej určujúcej počet maximálnych množín vo vybranej podmnožine G z U platí*

$$E(\nu) = \sum_{H\in A} p^{|H|}(1 - p^{(h^{T_H} - |H|)})^{t_H}$$

Dôkaz. Počítajme strednú hodnotu ν

$$\begin{aligned} E(\nu) &= E(\sum_{H\in A} \kappa_H \prod_{H'\in T_H} (1-\kappa_{H'})) = E\Bigg(\sum_{H\in A} \Big(\kappa_H - \sum_{H'\in T_H} \kappa_H \kappa_{H'} + \\ &\quad + \sum_{H'\in T_H} \sum_{\substack{H''\in T_H \\ H'\neq H''}} \kappa_H \kappa_{H'} \kappa_{H''} - \ \ldots \ + (-1)^{t_H} \kappa_H \prod_{H'\in T_H} \kappa_{H'} \Big)\Bigg) \end{aligned}$$

Z dôkazu lemy 5.19 vidieť, že platí $\kappa_H \kappa_{H'} = \kappa_{H'}$ pre $H \subseteq H'$. Upravíme predošlý výraz a dostávame:

$$\begin{aligned} E(\nu) &= \sum_{H\in A} E\left(\kappa_H + \sum_{t=1}^{t_H} (-1)^t \kappa_H \sum_{\substack{I\subseteq T_H \\ |I|=t}} \prod_{H'\in I} \kappa_{H'} \right) \\ &= \sum_{H\in A} E(\kappa_H) + \sum_{t=1}^{t_H} (-1)^t \sum_{\substack{I\subseteq T_H \\ |I|=t}} E\left(\prod_{H'\in I} \kappa_{H'} \right) \\ &\overset{(5.23)}{=} \sum_{H\in A} p^{|H|} + \sum_{t=1}^{t_H} (-1)^t \sum_{\substack{I\subseteq T_H \\ |I|=t}} p^{|\bigcup_{H'\in I} H'|} \\ &\overset{(5.24)}{=} \sum_{H\in A} p^{|H|} + \sum_{t=1}^{t_H} (-1)^t \sum_{\substack{I\subseteq T_H \\ |I|=t}} p^{|H|+|I|(h^{T_H}-|H|)} \\ &= \sum_{H\in A} p^{|H|} + \sum_{t=1}^{t_H} (-1)^t \binom{t_H}{t} p^{|H|+t(h^{T_H}-|H|)} \\ &= \sum_{H\in A} \sum_{t=0}^{t_H} (-1)^t \binom{t_H}{t} p^{|H|+t(h^{T_H}-|H|)} \\ &= \sum_{H\in A} p^{|H|} \sum_{t=0}^{t_H} (-1)^t \binom{t_H}{t} (p^{h^{T_H}-|H|})^t \\ &= \sum_{H\in A} p^{|H|} (1 - p^{(h^{T_H}-|H|)})^{t_H} \end{aligned}$$

Z toho dostávame hľadaný výraz. $\square$

5.3 Použitie výsledkov

V tejto časti sa budeme venovať použitiu predchádzajúcich výsledkov na konkrétnych aplikáciach pre hyperkocky Q_n, polené hyperkocky E_n a kompletné grafy K_n.

V prípade, že nebude uvedené inak, sa predpokladá, že existuje číslo $p \in (0,1)$ s vlastnosťou

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p$$

5.3.1 Hyperkocky

Zvoľme najprv za množinu objektov množinu vrcholov hyperkocky Q_n, t.j. $U = \{0,1\}^n$ (ďalej už len U_n). Ďalej za množinu A zvoľme množinu všetkých množín vrcholov podgrafov Q_n izomorfných s Q_m pre nejaké $m \leq n$. Keďže, Q_m má 2^m vrcholov, tak je zrejmé, že $A = A_m$ pre $f(n) = 2^n$ (v ďalšom budeme označovať A_m ako $A_{n,m}$ pre zdôraznenie veľkosti základnej množiny).

Na ďalší postup budeme potrebovať poznať veľkosť množiny $A_{n,m}$. Dá sa ukázať, že platí

$$|A_{n,m}| = 2^{n-m}\binom{n}{m}$$

Detaily je možné nájsť v [4]. Na základe toho môžeme použiť lemu 5.12 a dostávame nasledújuce:

$$E(\xi_{n,m}) = 2^{n-m}\binom{n}{m}p_n^{2^m}$$

$$D(\xi_{n,m}) \leq 2^{n-m}\frac{2^n}{2^m}\binom{n}{m}^2 p_n^{2^{m+1}}(p_n^{-2^m}-1)$$

Ďalej sa dá ukázať, že súčet mohutností všetkých prienikov prvkov z $A_{n,m}$ je určený nasledovne:

$$\sum_{H_1,H_2\in A_{n,m}} |H_1 \cap H_2| = 2^n\binom{n}{m}^2 = \frac{2^m}{2^n}2^m|A_{n,m}|^2$$

Na základe tejto nerovnosti môžeme použiť lemu 5.7 pre $\alpha = \frac{|U|}{h_h} = \frac{2^n}{2^m}$ a dostávame:

$$D(\xi_{n,m}) \leq 2^{n-m}\binom{n}{m}^2 p_n^{2^{m+1}}(p_n^{-2^m}-1)$$

Na záver môžeme použiť dôsledok 5.10 a dostávame, že

$$|\xi_{n,m} - 2^{n-m}\binom{n}{m}| \leq \varphi(n)\binom{n}{m}\sqrt{2^{n-m}p_n^{2^m}}$$

(keďže platí: $p_n^{2^m}\sqrt{p_n^{-2^m}-1} \leq \sqrt{p_n^{2^m}}$)

V ďalšom si zadefinujeme f^{-1} funkciu, ktorú budeme potrebovať na použitie dôsledku 5.15. Ľahko sa však môžeme presvedčiť, že platí

$$f^{-1}(x) = \lceil \log_2 x \rceil$$

v zmysle definície f^{-1} v dôsledku 5.15. Z vlastnosti $A_{n,m}$ vyplýva, že

$$|A_{n,m}| = 2^{n-m}\binom{n}{m} < 2^{2n}$$

čiže keď položíme $\varphi'(n) = \frac{2^{2n}}{|A_{n,m}|}$, je z toho vidieť, že $\lim_{n\to\infty} \varphi'(n) = \infty$. Na základe toho môžeme konečne použiť dôsledok 5.15 a dostávame odhad pre m - rozmer podkocky, ktorá sa s pravdepodobnosťou idúcou k 1 pre n idúce do nekonečna už nebude nachádzať vo väčšine podgrafov Q_n:

$$m \geq \left\lceil \log_2 \log_{\frac{1}{p_n}} 2^{2n} \right\rceil = \left\lceil \log_2 n - \log_2 \log_2 \frac{1}{p_n} \right\rceil + 1$$

Naviac, ak sa m položí $m \geq \left\lceil \log_2 n - \log_2 \log_2 \frac{1}{p_n} \right\rceil$, dostávame, že $\varphi'(n) = \frac{2^n}{|A_{n,m}|}$, z čoho vidieť, že pre takého $\varphi'(n)$ platí $\lim_{n\to\infty} \varphi'(n) = 0$. Z toho vyplýva, že uvedený odhad je najtesnejší možný.

Na koniec nám zostáva sa pozrieť, aký je očakávaný počet maximálnych podkociek. Na tento účel potrebujeme zistiť, ako vyzerá množina T_H pre podkocky rozmeru m. Dá sa však ukázať, že táto množina pozostáva zo všetkých nadkociek rozmeru $m+1$, ktoré obsahujú túto podkocku. Z tejto úvahy je vidieť, že množina T_H má tým pádom $n-m$ prvkov bez ohľadu na zvolenú podkocku rozmeru m. Použitím vety 5.26 dostávame

$$\begin{aligned} E(\nu_{n,m}) &= \sum_{H\in A_{n,m}} p_n^{2^m}(1-p_n^{2^{m+1}-2^m})^{n-m} \\ &= 2^{n-m}\binom{n}{m} p_n^{2^m}(1-p_n^{2^m})^{n-m} \end{aligned}$$

Tým sme vypočítali všetky dostupné výsledky pre hyperkocky vrholovo indukované. Pozrime sa teraz na to, čo sa stane, ak budeme uvažovať hranovo indukované kocky. Za množinu U_n zvolíme množinu všetkých hrán hyperkocky Q_n, tých je $f(n) = n2^{n-1}$. Množina $A = A_{n,m}$ bude obsahovať množiny hrán všetkých podgrafov hranovo indukovaných, ktoré sú izomorfné s Q_m, hyperkockou rozmeru m. Dá sa jednoducho presvedčiť, že každý hranovo indukovaný graf izomorfný s hyperkockou bude aj vrcholovo indukovaný na jeho množine vrcholov (vo všeobecnosti to neplatí). Z toho vyplýva, že počet výskytov izomorfných podkociek bude totožný s tým v prípade vrcholovo indukovaných podgrafov. Platí teda

$$E(\xi_{n,m}) = 2^{n-m}\binom{n}{m} p_n^{m2^{m-1}}$$

Tak, ako v predošlom prípade, dá sa na odhad disperzie $\xi_{n,m}$ použiť lema 5.7, pretože platí

$$\sum_{H_1,H_2\in A_{n,m}} |H_1 \cap H_2| = \frac{n2^{n-1}}{m2^{m-1}} m2^{m-1} |A_{n,m}|^2$$

a teda pre $\alpha = \frac{|U|}{h_h} = \frac{n2^{n-1}}{m2^{m-1}}$ platí

$$D(\xi_{n,m}) \le 2^{n-m}\frac{m}{n}\binom{n}{m}^2 p_n^{m2^m}(p_n^{-m2^{m-1}}-1)$$

$$|\xi_{n,m} - E(\xi_{n,m})| \le \varphi(n)\binom{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}2^{n-m}p_n^{m2^{m-1}}}$$

Pre ďalšie použitie budeme potrebovať vyjadriť inverznú funkciu f^{-1} k $f = n2^{n-1}$. Bohužiaľ táto funkcia sa nedá vhodne algebraicky vyjadriť, preto použijeme len odhad. Dá sa ukázať, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\log_2 x - \log_2\log_2 x + 1)}{x} = 1$$

Z toho dostávame, že

$$f^{-1}(x) \sim \lceil \log_2 x - \log_2\log_2 x \rceil + 1$$

Keďže, ako sme už spomenuli, platí $|A_{n,m}| = o(2^{2n})$, potom pre n idúce do nekonečna ide aj $\log_{\frac{1}{p_n}} 2^{2n}$ do nekonečna, takže môžeme použiť uvedený odhad. Použijeme teda dôsledok 5.15 a dostávame odhad pre m - rozmer podkocky, ktorá sa už nebude nachádzať vo väčšine podgrafov Q_n:

$$m \ge \left\lceil \log_2 n - \log_2\log_2\left(n\frac{2}{\log_2\frac{1}{p_n}}\right) - \log_2\log_2\frac{1}{p_n}\right\rceil + 2$$

Posledná vec, ktorá nám ostáva, je určiť počet maximálnych podkociek. Keďže, ako bolo už povedané, každá podkocka hranovo indukovaná je aj vrcholovo, je celkom očakávateľné, že počet nadkociek v T_H bude ako v prípade vrcholovo indukovaných hyperkociek práve $n-m$. Potom podobne použitím vety 5.26 dostávame:

$$E(\nu_{n,m}) = 2^{n-m}\binom{n}{m} p_n^{m2^{m-1}}(1-p_n^{(m+2)2^{m-1}})^{n-m}$$

5.3.2 Kompletné grafy

Ďalšou štruktúrou, ktorú použijeme na demonštráciu, sú kompletné grafy K_n. Zvoľme si množinu U_n ako množinu prvkov od 1 do n, t.j. $U_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, čiže $f(n) = n$. Keďže vrcholovo indukovaný podgraf kompletného grafu je tiež kompletný, bude množina $A_{n,m}$ obsahovať všetky podmnožiny mohutnosti m. Nie je potom prekvapením, že počet prvkov v $A_{n,m}$ je určený nasledovne:

$$|A_{n,m}| = \binom{n}{m}$$

Ak si vezmeme ľubovoľnú podmnožinu z $A_{n,m}$ a fixujeme si nejakých d prvkov, dostaneme, že existuje $\binom{n-m}{m-d}$ podmnožín, ktoré majú s touto podmnožinou daný prienik veľkosti d. Z toho potom vyplýva:

$$\sum_{H_1,H_2 \in A_{n,m}} |H_1 \cap H_2| = \sum_{H \in A_{n,m}} \sum_{d=0}^{m} \binom{m}{d}\binom{n-m}{m-d} d =$$

$$= \sum_{H \in A_{n,m}} m \binom{n-1}{m-1} = \frac{m}{n} m |A_{n,m}|^2$$

Na základe toho môžeme použiť lemu 5.7 a dostávame:

$$E(\xi_{n,m}) = \binom{n}{m} p^m$$

$$D(\xi_{n,m}) \le \frac{m}{n} \binom{n}{m}^2 p^{2m}(p^{-m} - 1)$$

a naviac z dôsledku 5.10:

$$|\xi_{n,m} - E(\xi_{n,m})| \le \varphi(n) \binom{n}{m} p^m \sqrt{\frac{m}{n}(p^{-m} - 1)}$$

Na použitie lemy 5.15 si musíme určiť f^{-1}. Je však hneď vidieť, že $f^{-1}(n) = n = f(n)$. Odhadneme $|A_{n,m}|$ zhora :

$$|A_{n,m}| \le \frac{2^n}{\sqrt{n}} < \frac{2^n}{\sqrt{n}} \varphi'(n)$$

kde $\varphi'(n) \to \infty$. Potom dostávame odhad pre m určujúce veľkosť kompletného podgrafu K_m, ktorý sa už nebude vyskytovať vo väčšine náhodných podgrafov K_n:

$$m \ge \left\lceil \frac{n - \frac{1}{2}\log_2 n + \log_2 \varphi'(n)}{\log_2 \frac{1}{p}} \right\rceil$$

Na záver pre získanie odhadu počtu maximálnych kompletných podgrafov potrebujeme určiť množinu T_H pre daný podgraf izomorfný s K_m. Je však ľahko vidieť, že ľubovoľný nadgraf z T_H tohoto podgrafu vznikne pridaním práve jedného vrcholu a tým pádom je týchto nadgrafov $n - m$. Potom už z vety 5.26 priamo vyplýva:

$$E(\nu_{n,m}) = \binom{n}{m} p_n^m (1 - p_n)^{n-m}$$

čo presne korešponduje s faktom, že náhodný podgraf bude obsahovať maximálny podgraf na m vrcholoch práve vtedy, keď bude mať m vrcholov.

Pozrime sa ešte detailne na situáciu v prípade hranovo indukovaných podgrafov. Základná množina U_n bude obsahovať všetky hrany kompletného grafu K_n, ktorých je $f(n) = \binom{n}{2}$. Množina vyberaných podgrafov bude obsahovať hrany všetkých podgrafov izomorfných s K_m. Keďže je ľahko vidieť, že každý hranovo indukovaný podgraf izomorfný s kompletným podgrafom veľkosti m, K_m, bude taktiež vrcholovo indukovaný, je zrejmé, že pre veľkost $A_{n,m}$ platí:

$$|A_{n,m}| = \binom{n}{m}$$

Z toho nám ale naviac vyplýva, že počet prienikov dvoch vybraných podgrafov izomofných s K_m je rovnaký ako v prípade vrcholovo indukovaných podgrafov až na to, že veľkosť prieniku bude $\binom{d}{2}$, keďže prienikom ľubovoľných dvoch kompletných podgrafov je tiež kompletný podgraf. Dostávame teda:

$$\sum_{H_1,H_2 \in A_{n,m}} |H_1 \cap H_2| = \sum_{H \in A_{n,m}} \sum_{d=0}^{m} \binom{m}{d}\binom{n-m}{m-d}\binom{d}{2} =$$

$$= \sum_{H \in A_{n,m}} \binom{m}{2}\binom{n-2}{m-2} = \frac{\binom{m}{2}^2}{\binom{n}{2}} |A_{n,m}|^2$$

Použitím lemy 5.7 a dôsledku 5.10 dostávame:

$$E(\xi_{n,m}) = \binom{n}{m} p_n^{\binom{n}{2}}$$

$$D(\xi_{n,m}) \le \frac{\binom{m}{2}}{\binom{n}{2}} \binom{n}{m}^2 p_n^{2\binom{m}{2}} (p_n^{-\binom{m}{2}} - 1)$$

$$|\xi_{n,m} - E(\xi_{n,m})| \le \varphi(n) \binom{n}{m} p_n^{\binom{m}{2}} \sqrt{\frac{\binom{m}{2}}{\binom{n}{2}} (p_n^{-\binom{m}{2}} - 1)}$$

Určíme si pre ďalšie použitie inverznú funkciu f^{-1}. Dá sa preveriť, že platí:

$$f^{-1}(x) = \left\lceil \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+8x}\right) \right\rceil$$

Použijeme odhad veľkosti $|A_{n,m}| < \frac{2^n}{\sqrt{n}}\varphi'(n)$ z predošlej časti a z dôsledoku 5.15 dostávame odhad pre m - veľkosť kompletného podgrafu, ktorý sa už nebude nachádzať vo väčšine podgrafov K_n:

$$m \ge \left\lceil \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 8\frac{n - \frac{1}{2}\log_2 n + \log_2 \varphi'(n)}{\log_2 \frac{1}{p_n}}}\right) \right\rceil$$

Nakoniec sa pozrime na strednú hodnotu počtu maximálnych kompletných podgrafov. Podobne ako pre vrcholovo indukované podgrafy je vidieť, že prvkami T_H budú hrany nadgrafov izomorfných s K_{m+1} obsahujúcich vybraný podgraf. Takýchto grafov je potom práve $n-m$ a použitím vety 5.26 dostávame:

$$E(\nu_{n,m}) = \binom{n}{m} p_n^{\binom{m}{2}} (1-p_n^m)^{n-m}$$

5.3.3 Polené hyperkocky

Nakoniec sa pozrieme na vlastnosti polených hyperkociek ako hlavných nami skúmaných štruktúr.

Polená hyperkocka E_n podobne ako obyčajná hyperkocka obsahuje $f(n) = 2^n$ vrcholov. Preto aj $U_n = \{0,1\}^n$. Opäť si vezmeme ako množinu podgrafov $A_{n,m}$ všetky tie, ktoré sú izomorfné s polenou hyperkockou E_m rozmeru m. Dá sa ukázať použitím vety 2.29, že počet prvkov tejto množiny je určený nasledovne:

$$|A_{n,m}| = 2^{n-m}\left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m\binom{n+1}{2^m}\right]$$

Použitím definície 4.1 a tvaru disperzie z dôkazu lemy 5.6 môžeme usúdiť, že platí:

$$D(\xi_{n,m}) = p_n^{2^{m+1}} G_{n,m}(p_n)$$

To znamená, že použitím lemy 4.2 hovoriacej o presnom tvare $G_{n,m}$ vieme určiť disperziu $\xi_{n,m}$ presne. Toto vyjadrenie bohužial nie je vhodné na ďaľšie uplatnenie. Preto použijeme ako v predchádzajúcich prípadoch odhad. Dá ukázať použitím vety 4.3 , že pre $\alpha = \frac{|U|}{h_h} = 2^{n-m}$ je splnený predpoklad z lemy 5.7,t.j.

$$\sum_{H_1,H_2\in A_{n,m}} |H_1\cap H_2| = \frac{2^m}{2^{n-m}}|A_{n,m}|^2$$

Z toho môžeme usúdiť, že platí:

$$E(\xi_{n,m}) = 2^{n-m}\left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m\binom{n+1}{2^m}\right] p_n^{2^m}$$

$$D(\xi_{n,m}) \le 2^{n-m}\left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m\binom{n+1}{2^m}\right]^2 p_n^{2^{m+1}}(p_n^{-2^m}-1)$$

a z toho dostávame

$$|\xi_{n,m} - E(\xi_{n,m})| \le \varphi(n)\left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m\binom{n+1}{2^m}\right] p_n^{2^m}\sqrt{2^{n-m}(p_n^{-2^m}-1)}$$

Taktiež podobne ako v prípade obyčajných hyperkociek platí $f^{-1}(x) = \lceil \log_2 x\rceil$. Opäť sa dá usúdiť, že $|A_{n,m}| = o(2^{2n})$, takže použitím dôsledku 5.15

dostávame vzťah pre m - rozmer podkocky, ktorá sa s pravdepodobnosťou idúcou k 1 pre n idúce do nekonečna už nebude nachádzať vo väčšine podgrafov E_n:

$$m \geq \left\lceil \log_2 n - \log_2 \log_2 \frac{1}{p_n} \right\rceil + 1$$

V ďalšom uvažujme podgrafy hranovo indukované. Za základnú množinu U_n si zoberme všetky hrany polenej hyperkocky E_n, ktorá, ako sa ukáže, má $f(n) = \binom{n+1}{2} 2^{n-1}$ hrán. Uvažujme všetky hranovo indukované podgrafy, ktoré budú izomorfné s polenou hyperkockou rozmeru m. Množiny hrán týchto grafov nám budú tvoriť množinu $A_{n,m}$. Na základe vety 2.30 sa dá ukázať, že pre počet prvkov tejto množiny platí :

$$|A_{n,m}| = 2^{n-m} \left[\binom{n+1}{m+1} + \frac{(n-m)!}{2^{[m=3]-[m=1]}(n-2^m+1)!} \right]$$

Z toho dostávame:

$$E(\xi_{n,m}) = 2^{n-m} \left[\binom{n+1}{m+1} + \frac{(n-m)!}{2^{[m=3]-[m=1]}(n-2^m+1)!} \right] p_n^{\binom{m+1}{2}2^{m-1}}$$

Navyše použitím lemy 5.6 dostávame, že

$$D(\xi_{n,m}) \leq 2^{2(n-m)} \left[\binom{n+1}{m+1} + \frac{(n-m)!}{2^{[m=3]-[m=1]}(n-2^m+1)!} \right]^2 p_n^{\binom{m+1}{2}2^m} (p_n^{-\binom{m+1}{2}2^{m-1}} - 1)$$

a z toho vyplýva, že platí:

$$|\xi_{n,m} - E(\xi_{n,m})| \leq \varphi(n) \left[\binom{n+1}{m+1} + \frac{(n-m)!}{2^{[m=3]-[m=1]}(n-2^m+1)!} \right] \times$$
$$\times\, 2^{n-m} p_n^{\binom{m+1}{2}2^{m-1}} \sqrt{(p_n^{-\binom{m+1}{2}2^{m-1}} - 1)}$$

Na využitie ďalšieho vzťahu, dôsledku 5.15, potrebujeme vyjadriť inverznú funkciu f^{-1}. Podobne ako v prípade hranovo indukovaných obyčajných podkociek to nie je jednoducho algebraicky vyjadriteľné, takže použijeme opäť len odhad. Dá sa podobne ako v prípade hranovo indukovaných obyčajných hyperkociek ukázať, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\log_2 x - 2\log_2 \log_2 x + 2)}{x} = 1$$

Môžeme teda použiť odhad pre f^{-1}:

$$f^{-1}(x) \sim \lceil \log_2 x - 2\log_2 \log_2 x \rceil + 2$$

Z toho dostávame použitím dôsledku 5.15 odhad pre m - rozmer podkocky, ktorá sa už nebude nachádzať vo väčšine podgrafov E_n :

$$m \geq \left\lceil \log_2 n - 2\log_2 \log_2 \left(n \frac{2}{\log_2 \frac{1}{p_n}} \right) - \log_2 \log_2 \frac{1}{p_n} \right\rceil + 3$$

Kapitola 6

Záver

V tejto časti zhrnieme všetky výsledky z predošlých kapitol. Na konci uvedieme možné spôsoby nadviazania na text tejto práce.

Na úvod v kapitole 2 sme sa zoznámili so štruktúrou polených hyperkociek. Zistili sme, že existujú 4 typy podkociek obsiahnutých v polených hyperkockách. Taktiež sme zistili celkový počet týchto podkociek rozmeru m v polenej hyperkocke rozmeru n a to je (veta 2.29):

$$S_{n,m} = 2^{n-m}\left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m\binom{n+1}{2^m}\right]$$

Potom sme skúmali hranovo indukované podkocky. S touto problematikou súvisel problém určenia počtu automorfizmov grafu polenej hyperkocky rozmeru n. Zistili sme, že tento počet sa dá vyjadriť ako (veta 2.26):

$$|\Gamma(E_n)| = 2^{n+[n=3]-[n=1]}(n+1)!$$

Na základe toho sme určili počet hranovo indukovaných polených hyperkociek rozmeru m obsiahnutých v grafe polenej hyperkocky rozmeru n. Tento počet sa dá vyjadriť ako (veta 2.30):

$$S^{(h)}_{n,m} = 2^{n-m}\binom{n+1}{m+1}\left[1 + \frac{(n-m)!}{2^{[m=3]-[m=1]}(n-2^m+1)!}\right]$$

Navyše sme ukázali, že každý podgraf polenej hyperkocky E_n izomorfný s polenou hyperkockou rozmeru m padne do jedného z uvádzaných 4 typov podkociek (veta 2.33), čiže sme tým dokázali, že iné typy podkociek sa tam nenachádzajú.

V kapitole 3 sme zaviedli istý algebraický pohľad na štruktúru polených hyperkociek. Definovali sme relácie a operácie a pomocou nich sme popísali podkocky obsiahnuté v grafe polenej hyperkocky. Vyzdvihnúť by sme mohli operácie $\odot$ a $\Cup$, pomocou ktorých vieme popísať prieniky podkociek a aj štruktúru najmenšej nadkocky ľubovoľného podgrafu polenej hyperkocky, a ktoré svojim spôsobom zjednodušujú rozbory vykonané v ďalších častiach práce.

V kapitole 4 sme na základe už spomenutej formalizácie detailne popísali všetky prieniky podkociek obsiahnutých v polenej hyperkocke. Na základe toho sme vypočítali súčet veľkostí týchto prienikov, ktorý bol potrebný na neskoršie pravdepodobnostné odhady. Tento súčet sa dá vyjadriť formulou (veta 4.3):

$$\sum_{\substack{H_1,H_2 \in {}^{(1)}E_m \cup {}^{(2)}E_{m+1} \cup \\ \cup {}^{(3)}E_{2^m-1} \cup {}^{(4)}E_{2^m}}} |H_1 \cap H_2| = 2^n \left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m \binom{n+1}{2^m} \right]^2$$

Posledná kapitola, kapitola 5, bola venovaná použitiu pravdepodobnostných metód na hľadanie odhadov zvolených vlastností uvažovaných grafov. Zaviedli sme pojem náhodnej podmnožiny na diskrétnom pravdepodobnostnom priestore s uvažovanou množinou tzv. pokrývacích množín A. Skúmali sme dve náhodné premenné. Prvou z nich bol počet pokrývacích množín ξ, t.j. prvkov z A obsiahnutých v danej množine. Druhou bol počet pokrývacích množin ν, ktoré boli v danej množine maximálne spomedzi prvkov z A vzhľadom na inklúziu. V prípade prvej náhodnej premennej sme vyjadrili jej strednú hodnotu a odhadli disperziu. Na základe toho sme získali interval, na ktorom bude daná premenná nadobúdať hodnoty s pravdepodobnosťou idúcou k 1. Naviac sme ukázali, pre aké hodnoty parametrov bude táto premenná nulová. V prípade druhej premennej sme najprv popísali jej konštrukciu a z nej vyplývajúci zjednodušujúci tvar a na základe toho sme vypočítali jej stretnú hodnotu.

V závere kapitoly 5 sme sa venovali aplikácii tvrdení z tejto kapitoly na grafy hyperkociek, polených hyperkociek a kompletných grafov. Výsledky pre obyčajné hyperkocky presne korešpondovali s literatúrou [4]. Výsledky pre kompletné grafy naopak boli len ukážkou aplikácie tvrdení aj na iný typ štruktúry. Najdôležitejšie však boli výsledky dosiahnuté pre polené hyperkocky. Zhrnieme si ich preto na tomto mieste.

Pre vrcholovo indukované polené hyperkocky platí:

$$E(\xi_{n,m}) = 2^{n-m} \left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m \binom{n+1}{2^m} \right] p_n^{2^m}$$

$$D(\xi_{n,m}) \le 2^{n-m} \left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m \binom{n+1}{2^m} \right]^2 p_n^{2^{m+1}} (p_n^{-2^m} - 1)$$

$$|\xi_{n,m} - E(\xi_{n,m})| \le \varphi(n) \left[\binom{n+1}{m+1} + 2^m \binom{n+1}{2^m} \right] p_n^{2^m} \sqrt{2^{n-m}(p_n^{-2^m} - 1)}$$

a pre rozmer polenej hyperkocky m neobsiahnutej vo väčšine podgrafov E_n platí:

$$m \ge \left\lceil \log_2 n - \log_2 \log_2 \frac{1}{p_n} \right\rceil + 1$$

Pre hranovo indukované polené hyperkocky platí:

$$E(\xi_{n,m}) = 2^{n-m} \left[\binom{n+1}{m+1} + \frac{(n-m)!}{2^{[m=3]-[m=1]}(n-2^m+1)!} \right] p_n^{\binom{m+1}{2} 2^{m-1}}$$

$$D(\xi_{n,m}) \leq 2^{2(n-m)} \left[\tbinom{n+1}{m+1} + \tfrac{(n-m)!}{2^{[m=3]-[m=1]}(n-2^m+1)!}\right]^2 p_n^{\binom{m+1}{2}2^m} (p_n^{-\binom{m+1}{2}2^{m-1}} - 1)$$

$$|\xi_{n,m} - E(\xi_{n,m})| \leq \varphi(n) \left[\binom{n+1}{m+1} + \frac{(n-m)!}{2^{[m=3]-[m=1]}(n-2^m+1)!}\right] \times$$
$$\times\, 2^{n-m} p_n^{\binom{m+1}{2}2^{m-1}} \sqrt{(p_n^{-\binom{m+1}{2}2^{m-1}} - 1)}$$

a pre rozmer polenej hyperkocky m neobsiahnutej vo väčšine podgrafov E_n platí:

$$m \geq \left\lceil \log_2 n - 2\log_2 \log_2 \left(n \frac{2}{\log_2 \frac{1}{p_n}} \right) - \log_2 \log_2 \frac{1}{p_n} \right\rceil + 3$$

Potenciálne ďalšie problémy, ktoré by bolo vhodné v súvislosti s touto problematikou skúmať, by mohli byť napríklad nasledovné (v zátvorke sú uvedené poznámky autora k možnostiam riešenia uvedených problémov):

- Exaktný výpočet disperzie náhodnej premennej $\xi_{n,m}$ pre prípad hranovo indukovaných polených hyperkociek, ktorý by zahŕňal rozbor všetkých prípadov prienikov podkociek (tento rozbor je už vlastne uvedený v práci, ale v prípade hranovo indukovaných hyperkociek vzniká problém s vnorením podkociek do kompletných podgrafov, o ktorých vieme, že sú jedným z prípadov podkociek obsiahnutých v polenej hyperkocke a na základe vlastností symetrie vieme aj, aký je počet rôznych vnorení, no čo nevieme je, aký počet hrán bude v prieniku, ak budeme uvažovať konkrétne dva kompletné podgrafy a konkrétne vnorenia polených hyperkociek do týchto grafov).

- Presnejší odhad hodnoty disperzie náhodnej premennej $\xi_{n,m}$ pre prípad hranovo indukovaných polených hyperkociek (na základe predchádzajúcej úvahy a z dôvodu, že nevieme presne určiť počet prienikov podkociek hranovo indukovaných polených hyperkociek, je v práci použitý na odhad disperzie najjednoduchší odhad z lemy 5.6. Jedným z lepších odhadov by bolo nájdenie vhodného α pre odhad z lemy 5.7. Vzhľadom na charakter doterajších výpočtov je najlepším kandidátom $\alpha = \frac{|U|}{h_h}$. Na použitie tejto lemy však chýba znalosť hodnoty súčtu veľkostí prienikov hranovo indukovaných podkociek obsiahnutých v grafe polenej hyperkocky).

- Získanie odhadu pre strednú hodnotu počtu maximálnych podkociek polených hyperkociek (ako sa nedá si nepovšimnúť, odhad uvádzaný v tejto práci (veta 5.26) je použitý len na výpočet strednej hodnoty ν v prípade obyčajných hyperkociek, resp. kompletných grafov. Tie totiž spĺňajú podmienku, že prieniky prvkov z T_H, t.j. nadmnožín uvažovanej maximálnej množiny H, obsahujú len samotnú množinu H. Problémom je ale, že táto podmienka nie je splnená v prípade polených hyperkociek. Totiž najmenšie nadkocky podgrafov tretieho typu, t.j. prvkov ${}^{(3)}E_{2^m}$, budú aj prvky z ${}^{(3)}E_{2^{m+1}}$ a bohužiaľ sa nedajú eliminovať ani na základe lemy 5.19. Týchto nadkociek bude $\binom{n-2^m}{2^m}$ a prienikom ľubovoľného počtu z nich bude prvok ${}^{(3)}E_k$, kde $2^m \leq k < 2^{m+1}$, čo (okrem prípadu $k = 2^m$, čo však je samotná uvažovaná podkocka) neodpovedá žiadnej podkocke, a teda sa tieto nadkocky nedajú eliminovať na základe lemy 5.21. Na odhad strednej hodnoty ν nepomáhajú ani odhady z lemy 5.24, keďže sa tento odhad dosadzuje do sumy so striedavými znamienkami. Navyše neukázal sa jednoduchým ani presný výpočet sumy $\sum_{\substack{|I|=t \\ I \subseteq T_H}} p^{|\bigcup_{H' \in I} H'|}$).

- Odhad rozmerov maximálnych podkociek polených hyperkociek (na základe získaného vzťahu pre počet maximálnyh podkociek).
- Odhad veľkosti pokrytia konštruovaného pomocou maximálnych podkociek polených hyperkociek (akýsi ekvivalent skrátenej formy DNF).

Literatúra

[1] Diestel, R: *Graph Theory*, electronic edition, Springer-Verlag, New York 1997, 2000, s. 229-250

[2] Jablonskij, S. V.: *Úvod do diskrétnej matematiky*, Nauka, Moskva 1979, (slovenský preklad, Alfa-STNL, Bratislava 1984, s. 210-242)

[3] Riečan, B., Lamoš, F., Lenárt C.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*, Alfa-STNL, Bratislava 1984, s. 37-59

[4] Škoviera, M.: *On the minimization of random Boolean functions, Part I.*, In: *Computers and Artificial Intelligence*, Vol. 5, 1986, No.5, s. 321-334