Transcendenz von e und π[1].

Von

P. Gordan in Erlangen.

Hermite hat die Transcendenz von e und Lindemann die von π bewiesen, d. h. sie haben gezeigt, dass keine ganze Function mit ganzzahligen Coefficienten e oder π zur Wurzel hat.

Neuerdings haben Hilbert und Hurwitz Vereinfachungen des Beweises angebracht, in Folge deren er sich folgendermassen gestaltet.

Die Function e^x ist durch die Reihe definirt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots .$$

Dieselbe geht, wenn man die symbolische Bezeichnung einführt:

$$r! = h^r$$

und mit dieser Grösse und einer beliebigen ganzen Zahl c_r multiplicirt, in die Formel über:

$$c_r h^r e^x = c_r (x+h)^r + c_r x^r u_r \ldots \tag{1}$$

wo u_r die Reihe:[2]

$$u_r = \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{r+1 \cdot r+2} + \cdots$$

bedeutet. Ist:[3]

$$\xi = \operatorname{mod.} x$$

so hat man:

$$\operatorname{mod.} u_r < e^\xi$$

und wenn man:

$$u_r = q_r e^\xi$$

setzt:

$$\operatorname{mod.} q_r < 1.$$

Aus der Formel (1) folgen nun die folgenden:

$$c_r h^r e^x = c_r (x+h)^r + c_r x^r q_r e^\xi,$$
$$e^x \sum_{r=0}^{r=s} c_r h^r = \sum_{r=0}^{r=s} c_r (x+h)^r + e^\xi \sum_{r=0}^{r=s} c_r q_r x^r$$

und, wenn man:

$$\sum_{r=0}^{r=s} c_r x^r = \varphi(x); \qquad \sum_{r=0}^{r=s} c_r q_r x^r = \psi(x)$$

setzt:

$$e^x \varphi(h) = \varphi(x+h) + e^\xi \psi(x). \tag{2}$$

Giebt es nun eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} C_\varkappa e^\varkappa = 0,$$

so wird aus Formel (2):

$$0 = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} C_\varkappa \varphi(\varkappa + h) + \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} C_\varkappa \psi(\varkappa) e^\varkappa. \tag{3}$$

---

[1] Mathematische Annalen, B. 43, S. 222–224.

[2] i. e., $u_r = \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{(r+1)(r+2)} + \cdots$.

[3] i. e., $\xi = |x|$.

Wählt man für φ die Function:[4]

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(1-x, 2-x \ldots n-x)^p$$

und für p eine Primzahl grösser als die Zahlen n und C_0, so werden in F. (3) die Grössen:

$$\varphi(h+\varkappa)$$

ganze Zahlen.

$$\varphi(h+1),\ \varphi(h+2) \ldots \varphi(h+n)$$

haben den Factor p,

$$C_0\varphi(h)$$

hat ihn nicht.

Lässt man p wachsen, so werden φ und ψ beliebig klein, Formel (3) ist unmöglich und die Zahl e transcendent.

Wäre $i\pi$ die Wurzel einer Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten

$$c(x-w_1)(x-w_2)\ldots(x-w_\varrho) = 0, \tag{4}$$

so hätte man die Formel:

$$(1+e^{w_1})(1+e^{w_2})\cdots(1+e^{w_\varrho}). \tag{5}$$

Befinden sich unter den Summen

$$w_\varkappa;\ w_i + w_\varkappa;\ w_i + w_\varkappa + w_\lambda \ldots$$

$C-1$ verschwindende Grössen und bezeichnet man die übrigen durch:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots \alpha_n$$

und ihre Moduln durch:

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots a_n,$$

so wird Formel (5):

$$0 = C + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} e^{\alpha_\varkappa}. \tag{6}$$

Sowohl die symmetrischen Functionen der $cw_\varkappa$ als auch die der $c\alpha_\varkappa$ sind ganze Zahlen.

Nach Formel (2) wird dann:

$$0 = C\varphi(h) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varphi(\alpha_\varkappa + h) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} e^{a_\varkappa}\psi(\alpha_\varkappa). \tag{7}$$

Dieses Mal sei:

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} c^{np+p-1}(x-\alpha_1 \cdot x-\alpha_2 \cdots x-\alpha_n)^p$$

und p eine Primzahl grösser als die Zahlen:

$$C;\ n;\ c;\ c^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

Die Grössen $\varphi(h)$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varphi(\alpha_\varkappa + h)$ sind ganze Zahlen:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varphi(\alpha_\varkappa + h)$$

hat den Factor p; $C\varphi(h)$ aber nicht.

Wächst p, so werden die Moduln von φ und ψ beliebig klein.

Die Formel (7) ist unmöglich und daher π eine transcendente Zahl.

Erlangen im Mai 1893.

[4] i. e., $\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(1-x)^p(2-x)^p\cdots(n-x)^p$