LIMITES ET CONTINUITE DE FONCTIONS

I. Définitions.

1. Limite d'une fonction à l'infini.

a/ Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0\,,+\infty[$.

Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ signifie que pour tout réel M, l'intervalle $]M\,,+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x assez grands.

Autrement dit : il existe un réel A au-delà duquel tout x a son image par f qui est plus grande que M, quelle que soit la valeur de M ("aussi grande que l'on veut").

Ecriture symbolique :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in]A, +\infty[, f(x) \in]M, +\infty[$

Notations :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se lit : "$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$" ou "la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est $+\infty$".

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ se lit : "la limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$".

Exemple d'utilisation de la démonstration :

Prenons la fonction carré (on a admis depuis la classe de seconde que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et intuitivement, ça ne pose pas de problème ; la définition 1 permet de donner une démonstration de ce résultat.)

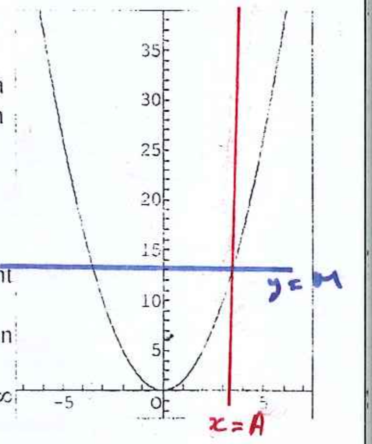
Soit M un réel positif quelconque.

Il suffit de choisir A = ..$\sqrt{M}$......... et on a alors : $\forall x > A, x^2 > M$

Pour démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, il suffit de choisir A = ...$-\sqrt{M}$.... et on a alors : $\forall x$ ..<.. A, x^2 ..>.. M

Interprétation graphique :

Pour toute droite d'équation $y = M$, on peut trouver une droite d'équation $x = A$ telle que la courbe représentative de la fonction f restreinte à $]A\,,+\infty[$ est dans le domaine du plan défini par $\begin{cases} x > A \\ y > M \end{cases}$.



Résultats à connaître :

Les fonctions $[x \longmapsto x]$, $[x \longmapsto x^2]$, $[x \longmapsto x^n]$ (n entier naturel non nul), $[x \longmapsto \sqrt{x}]$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Les fonctions $[x \longmapsto x^2]$, $[x \longmapsto x^n]$ (n entier naturel pair non nul) ont pour limite $+\infty$ en $-\infty$.

Les fonctions $[x \longmapsto x]$, $[x \longmapsto x^n]$ (n entier naturel impair non nul) ont pour limite $-\infty$ en $-\infty$.

b/ Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0\,,+\infty[$.

Dire que $f(x)$ a pour limite le nombre ℓ quand x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de centre ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x assez grands.

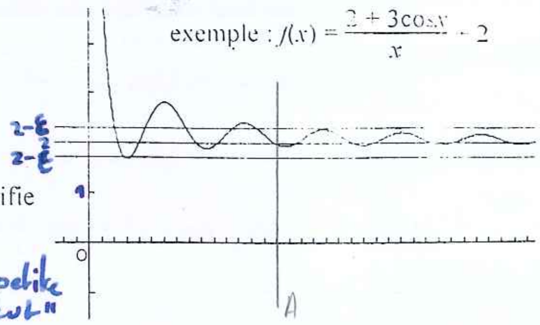
Autrement dit : il existe un réel A au-delà duquel tout x a son image par f qui est dans $]\ell-\varepsilon\,,\ell+\varepsilon[$, quelle que soit la valeur strictement positive de ε ("aussi petite que l'on veut").

Ecriture symbolique :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in]A, +\infty[, |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Interprétation graphique :

exemple : $f(x) = \dfrac{2 + 3\cos x}{x} + 2$



Soit d la droite d'équation $y = \ell$. Si deux points M et N, avec $M \in Cf$ et $N \in d$, ont la même abscisse x, alors :

$MN = |f(x) - \ell|$.

Dire que $f(x)$ a pour limite le nombre ℓ quand x tend vers $+\infty$ signifie que la distance MN est arbitrairement* petite pour tout x assez grand.

La droite d est asymptote horizontale à Cf en $+\infty$.

*"Aussi petite que l'on veut"

Exemple d'utilisation de la démonstration :

Prenons la fonction inverse (on a admis depuis la classe de seconde que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et intuitivement, ça ne pose pas de problème ; la définition 2 permet de donner une démonstration de ce résultat.)

Soit n un entier naturel quelconque. Prenons $\varepsilon = 10^{-n}$. (le choix d'écrire $\varepsilon = 10^{-n}$ n'est pas indispensable mais il permet souvent de rendre la manipulation des nombres plus aisée)

Il suffit de choisir A = $\frac{1}{\varepsilon}$.......... et on a alors : $\forall x > A,\ -\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$

Pour démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, il suffit de choisir A = ... et on a alors : $\forall x$ ..... A, $-\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$

Résultats à connaître :

Les fonctions $[x \mapsto \frac{1}{x}]$, $[x \mapsto \frac{1}{x^2}]$, $[x \mapsto \frac{1}{x^n}]$ (n entier naturel non nul), $[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}]$ ont pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Asymptote oblique.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0, +\infty[$.

Si pour tout réel x assez grand, $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$, on dit alors que le droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ et C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{x^2}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$f(x) = \frac{x}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{donc, } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\forall x > 0,\ \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$$

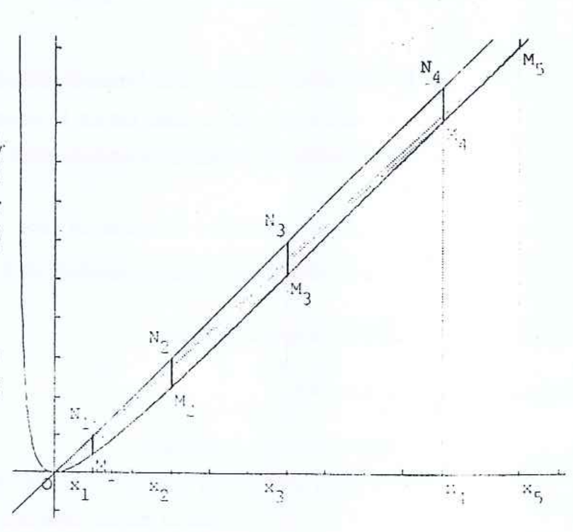
> Rappel : le numérateur et le dénominateur de cette fonction rationnelle tendent tous les deux vers l'infini en $+\infty$. Pour l'étude de la limite de f en $+\infty$, on dit qu'il s'agit d'une forme indéterminée. On lève cette forme indéterminée en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré.
>
> On avait, en première, extrait de cette technique un résultat de cours :
>
> Une fonction rationnelle a, en l'infini, la même limite que le quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.
>
> $$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

Interprétation graphique de ce résultat intermédiaire :

Soit $M(x, f(x))$. M est un point de C_f.

$\frac{f(x)}{x}$ est les coefficient directeur de la droite (OM).

Quand x devient de plus en plus grand, M se déplace sur C_f vers la droite. Quand x tend vers $+\infty$, la droite (OM) tend vers une position qui "semble indiquer la direction prise par la courbe C_f en $+\infty$". Cette droite vers laquelle tend (OM) est appelée direction asymptotique de C_f en $+\infty$.



Soit N le point de cette direction asymptotique, d'abscisse x.

Pour savoir si C_f possède une asymptote, il reste à "mesurer" l'écart MN entre C_f et sa direction asymptotique, et à savoir si cet écart tend vers une valeur constante.

$MN = |f(x) - x|$

$$\forall x > -1,\ |f(x) - x| = \frac{x^2}{x+1} - x$$

$$|f(x) - x| = \left|\frac{-x}{x+1}\right| = \frac{x}{x+1}$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x) - x| = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$$

Traçons l'image de la direction asymptotique de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $-\vec{j}$.
On obtient la droite d d'équation $y = x - 1$.
Vérifions que la droite d est bien asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

$\forall x > -1, f(x) - (x-1) = \dfrac{x^2}{x+1} - x + 1$

$f(x) - (x-1) = \dfrac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$

la droite d d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

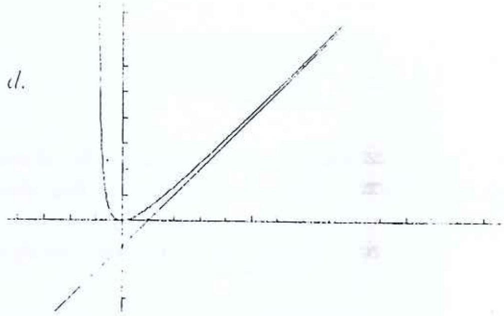
Etudions maintenant la position relative de $\mathcal{C}_f$ avec son asymptote d.

$\forall x > -1, f(x) - (x-1) = \dfrac{1}{x+1}$

$\forall x > -1, f(x) - (x-1) > 0$

$\forall x > -1, f(x) > x - 1$

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de d sur $]-1\,;+\infty[$.



3. Limite d'une fonction en un réel a.

a/ Définition : Soit a un réel et f une fonction dont l'ensemble de définition contient au moins un intervalle de la forme $]a - \alpha\,, a[$ ou $]a\,, a+\alpha[$.

Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a signifie que pour tout réel M, l'intervalle $]M\,, +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x assez proches de a.

Autrement dit : il existe un réel positif β tel que pour tout x dans $]a-\beta\,, a+\beta[$, x a son image par f qui est plus grande que M, quelle que soit la valeur de M ("aussi grande que l'on veut").

Ecriture symbolique :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \beta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]a-\beta\,, a+\beta[\,, f(x) \in]M\,, +\infty[$$

Notations :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ se lit : "$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a" ou "la limite de $f(x)$ quand x tend vers a est $+\infty$".

$\lim\limits_{a} f = +\infty$ se lit : "la limite de la fonction f en a est $+\infty$".

Interprétation graphique :

La droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale) à la courbe représentative de la fonction f.

Résultats à connaître :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. On écrit aussi $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Et on dit : "La limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $+\infty$". On peut aussi dire "la limite à droite en 0 de la fonction $\left[x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$ est $+\infty$".

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ (n entier naturel impair non nul).

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ (n entier naturel pair non nul).

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère $(O\,, \vec{i}\,, \vec{j})$. Elle n'admet pas de limite en 2, mais elle admet une limite à gauche et une limite à droite en 2.

première méthode :

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2} (2-x) = 0 \\ \text{et } \forall x > 2, 2 - x < 0 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{1}{2-x} = -\infty$

De même, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$

deuxième méthode :

On pose $x = 2 + h$, avec $h \neq 0$

$f(x) = \dfrac{1}{2-2+h} = -\dfrac{1}{h}$

Or, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{1}{h} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{1}{h} = -\infty$

Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{1}{2-x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$

La droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

b/ Définition : Soit a un réel et f une fonction dont l'ensemble de définition contient au moins un intervalle de la forme $]a - \alpha\ ,\ a[$ ou $]a\ ,\ a + \alpha[$.

Dire que $f(x)$ a pour limite le nombre ℓ quand x tend vers a signifie que tout intervalle ouvert de centre ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x assez proches de a.

Autrement dit : il existe un réel positif β tel que pour tout x dans $]a - \beta\ ,\ a + \beta[$, x a son image par f qui est dans $]\ell - \varepsilon\ ,\ \ell + \varepsilon[$, quelle que soit la valeur strictement positive de ε ("aussi petite que l'on veut").

Ecriture symbolique :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+,\ \exists\, \beta \in \mathbb{R}^*_+,\ \forall\, x \in\ ]a - \beta\ ,\ a + \beta[\ ,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

c/ Définition : Continuité en a d'une fonction f définie en a.

Soit a un réel et f une fonction dont l'ensemble de définition contient au moins un intervalle de la forme $]a - \alpha\ ,\ a + \alpha[$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ alors on dit que la fonction est continue en a.

Exemples :

Soit f la fonction définie sur IR par :
$\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 & \text{si } x \le 2 \\ f(x) = -2x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (-2x + 9) = 5$

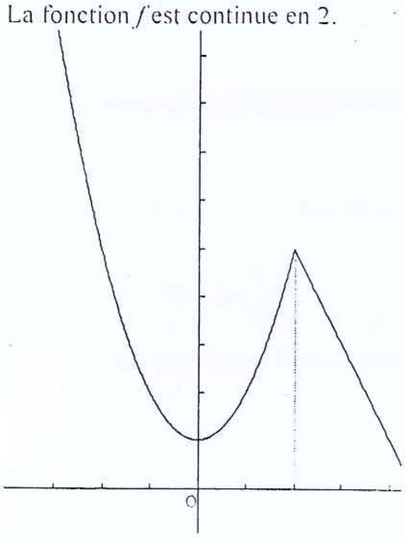
$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = 5$

Donc, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$

Et $f(2) = 2^2 + 1 = 5$

Donc, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

La fonction f est continue en 2.

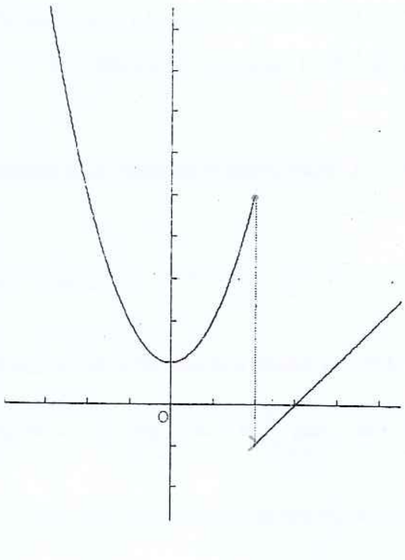


Soit f la fonction définie sur IR par :
$\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 & \text{si } x \le 2 \\ f(x) = x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

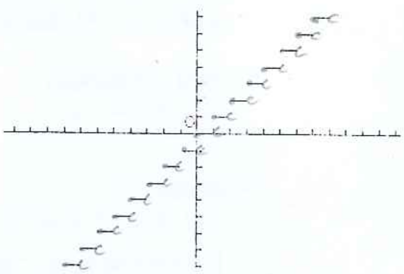
$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (\underset{x-3}{\cancel{-2x + 9}}) = -1$

f n'admet pas de limite en 2 donc la fonction f n'est pas continue en 2.



Cas de la fonction partie entière :
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ E(x) = k$ avec :
$\begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ k \le x < k + 1 \end{cases}$



La fonction partie entière n'est pas continue en quelque valeur entière que ce soit.

Elle est par contre continue en tout réel non entier.

II. Opérations sur les limites.

Dans ce paragraphe, α désigne soit un nombre réel a, soit a^+, soit a^-, soit $-\infty$, soit $+\infty$. ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels.

1. Limite d'une somme de deux fonctions.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
et si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} (f + g)(x) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

2. Limite d'un produit de deux fonctions.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	0
et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} (f \times g)(x) =$	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

3. Limite de l'inverse d'une fonction.

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	$\ell \neq 0$	0 et si $g > 0$	0 et si $g < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) =$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

4. Limite de la composée de deux fonctions.

Proposition : Soit $f = g \circ u$, une fonction composée de deux fonctions u et g.

a, b, et λ désignent des réels, ou $-\infty$, ou $+\infty$.

Si on a $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{u(x) \to b} g(x) = \lambda$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lambda$

Démonstration dans le cas où $a = +\infty$, $b = -\infty$ et λ réel :

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & & \lambda \\ \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\ x & \longmapsto & u(x) & \longmapsto & g(u(x)) \\ & & X & \longmapsto & g(X) \end{array}$$

Soit J un intervalle ouvert qui contient λ.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lambda$, il existe un réel positif A tel que Jcontient tous les réels $g(X)$ pour $X < -A$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$, il existe un réel positif B tel que $]-\infty, -A[$ contient tous les réels $u(x)$ pour $x > B$.

On a donc : Si $x > B$, alors $u(x) < -A$ et $g(u(x)) \in J$.

Si $x > B$, alors $f(x) \in J$.

Ainsi, tout intervalle ouvert J qui contient λ contient aussi tous les réels $f(x)$ pour x assez grand : ce qui signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$

5. Exemples.

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

a/ $f : x \longmapsto \dfrac{1+x}{2-x}$ en 2; b/ $g : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{x+1}$ en $+\infty$; $h : x \longmapsto x - \sqrt{x^2+1}$ en $+\infty$; $k : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{4x+1}{x-1}}$ en $+\infty$.

III. Théorèmes de comparaison.

1. Théorème des gendarmes.

Soit ℓ un nombre réel et f, g, h trois fonctions définies sur un intervalle de la forme $[r, +\infty[$, avec r réel, telles que :

$g \leq f \leq h$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$.

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Démonstration : Soit J un intervalle ouvert contenant ℓ Il s'agit de démontrer que J contient tous les réels $f(x)$ pour x assez grand.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g = \ell$ donc il existe un réel A_1 tel que : $\forall x > A_1$, $g(x) \in J$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} h = \ell$ donc il existe un réel A_2 tel que : $\forall x > A_2$, $h(x) \in J$.

On pose $A = \max(A_1, A_2)$, le plus grand des deux réels A_1 et A_2.

Si x est supérieur à A, l'intervalle J contient $g(x)$ et $h(x)$, donc J contient tous les réels compris entre $g(x)$ et $h(x)$. En particulier, J contient $f(x)$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f = \ell$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2 + 3\cos x}{x} + 2$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Deux autres théorèmes de comparaison.

a/ Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I = [r, +\infty[$, avec r réel.

- Si $\forall x \in I, f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

b/ Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I = [r, +\infty[$, avec r réel, telles que :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell'$.

Si $f \leq g$, alors $\ell \leq \ell'$.

Attention : on peut avoir $\ell = \ell'$ même si $f < g$.

Exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

$\forall x > 0, f(x) < g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

IV. Continuité.

1. Notion de continuité.

a/ Fonction continue sur un intervalle.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

La fonction f est continue sur I si elle est continue en a, pour tout réel a de I, c'est-à-dire si $\forall a \in I$, $\lim\limits_{a} f = f(a)$, ou, autrement dit, $\forall a \in I$, $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction continue sur un intervalle ne présente pas de "saut" sur cet intervalle ; on peut la tracer sans lever le crayon.

Alors que la courbe d'une fonction non continue sur un intervalle présente au moins un "saut" sur cet intervalle : par exemple, la fonction partie entière n'est pas continue sur $[0, 2[$: elle est discontinue en 1 sur cet intervalle.

b/ Cas des fonctions usuelles.

Théorème : continuité d'une fonction dérivable :

Soit f une fonction définie sur D_f et I un intervalle inclus dans D_f.

Si la fonction f est dérivable sur l'intervalle I, alors f est continue sur I.

Démonstration : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.

Donc, pour tout réel h tel que $a + h$ appartienne à I, on a :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon(h), \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

D'où, $f(a+h) = f(a) + h\big(f'(a) + \varepsilon(h)\big)$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} h\big(f'(a) + \varepsilon(h)\big) = 0 \times (f'(a) + 0) = 0$

Donc, $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

La fonction f est continue en a.

Finalement, la fonction f est continue sur I.

> Rappels :
>
> Définition : Soit f une fonction définie sur D_f et I un intervalle inclus dans D_f.
>
> f est dérivable en a si le quotient $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.
>
> La limite de ce quotient est alors notée $f'(a)$ et appelée le nombre dérivé de f en a :
>
> $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
>
> Si f est dérivable en a, le réel $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point $A(a, f(a))$.

Remarque : la réciproque de ce théorème est fausse.

Par exemple, les fonctions racine carrée et valeur absolue sont continue en 0, mais ne sont pas dérivables en 0.

Théorème admis :continuité des fonctions usuelles

Toute fonction construite à partir des fonctions polynômes, de la fonction racine carrée, de la fonction valeur absolue et des fonctions sinus et cosinus par addition, multiplication ou composition, est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$.

La fonction f est le produit de la fonction polynôme $[x \longmapsto x]$ et de la fonction $[x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1}]$ qui est la composée de la fonction polynôme $[x \longmapsto x^2 - 1]$ suivie de la fonction racine carrée.

Donc la fonction f est continue sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$.

Prouver que la fonction f n'est dérivable ni en -1 ni en 1.

c/ Tableau de variations d'une fonction continue.

Par convention, les flèches obliques du tableau de variations d'une fonction traduisent la continuité et la stricte monotonie de cette fonction sur l'intervalle correspondant.

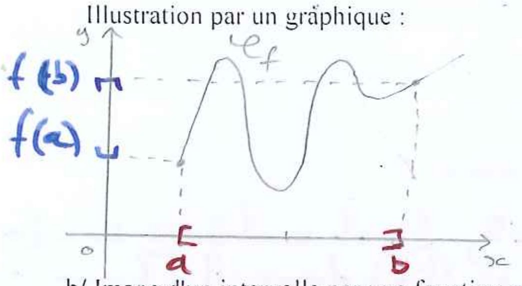
2. Propriété des fonctions continues.

a/ Théorème des valeurs intermédiaires (admis, bien que pouvant être démontré à l'aide des suites adjacentes, étudiées plus tard dans l'année…).

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel au moins c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Illustration par un graphique :



b/ Image d'un intervalle par une fonction continue.

Propriété (admise, découlant du théorème des valeurs intermédiaires) :

Soit f une fonction définie sur D_f et I un intervalle inclus dans D_f.

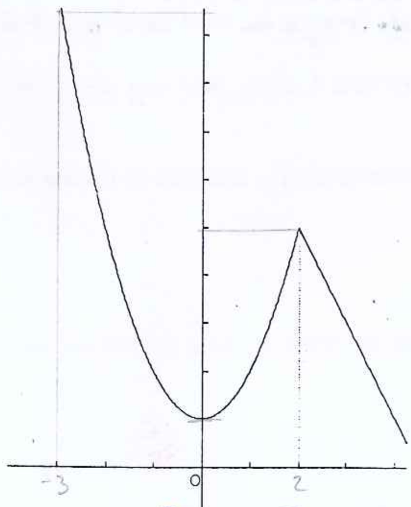
Si la fonction f est continue sur l'intervalle I, alors l'image $f(\mathrm{I})$ de l'intervalle I par la fonction f est aussi un intervalle.

Remarque : l'image d'un intervalle par une fonction non continue sur cet intervalle peut être un intervalle, mais ce n'est pas forcément le cas.

Exemples : reprenons les fonctions de la partie I. 3. c/

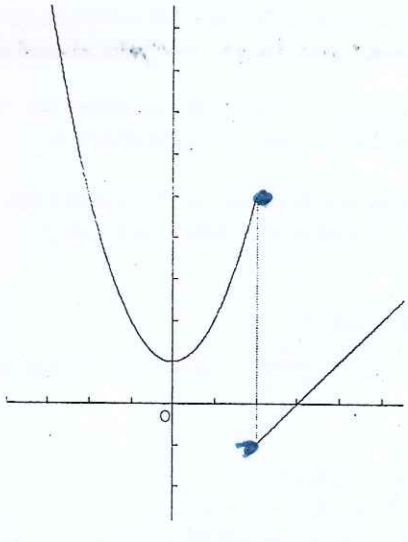
Soit f la fonction définie sur IR par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 & \text{si } x \le 2 \\ f(x) = -2x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La fonction f est continue sur IR.



$f([-3, 2]) =$ [1;10]

Soit f la fonction définie sur IR par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 & \text{si } x \le 2 \\ f(x) = x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$
La fonction f n'est pas continue en 2.



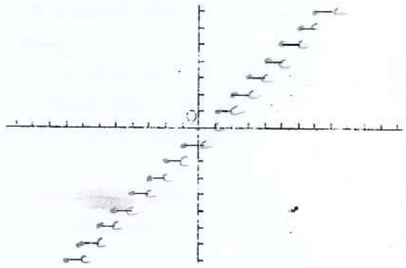
$f([-3, 2]) =$ [1;10]

$f([2, 4]) =$]-1;1] ∪ {5}

$f([-1, 3]) =$ [-1;0] ∪ [1;5]

$f([0, 5]) =$]-1;5]

Cas de la fonction partie entière :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) = k$ avec :
$$\begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ k \le x < k + 1 \end{cases}$$



La fonction partie entière n'est pas continue sur IR.

$f([-3, 2]) =$ -3

3. Fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle.

a/ Stricte monotonie et dérivabilité.

Rappel : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction dérivée f' est positive sur l'intervalle I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle inclus dans I, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si la fonction dérivée f' est négative sur l'intervalle I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle inclus dans I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

b/ Fonction continue strictement monotone sur $[a\ ,\ b]$.

Corollaire (= conséquence directe d'un théorème déjà démontré) du théorème des valeurs intermédiaires :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a\ ,\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans l'intervalle $[a\ ,\ b]$.

Démonstration : dans le cas où f est strictement croissante sur l'intervalle $[a\ ,\ b]$.

Existence d'une solution :

D'après le th$^{\text{ème}}$ des val$^{\text{rs}}$ intermédi$^{\text{aires}}$, f est continue sur $[a, b]$ et $k \in \mathbb{R}$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ donc il $\exists$ au - un nbre c, tel que $f(c)=k$.

Unicité de la solution :

(par l'absurde)
Supposons qu'il $\exists$ deux val$^{\text{rs}}$ ds $[a,b]$ telsque $f(c_1)=f(c_2)=k$ et $c_1<c_2$.
f est strict$^{\text{t}}$ $\nearrow$ sur $[a,b]$ dc $f(c_1)<f(c_2)$. D'où une contradic°, dc : $c_1=c_2$.
Final$^{\text{t}}$, $\exists$ une sol° uniQ.

a/ Extension au cas d'un intervalle quelconque.

Le corollaire précédent s'étend au cas d'un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non borné.

→ fonc° pr laqt une image a un seul antécéd$^{\text{nt}}$.

Théorème de la bijection :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I, alors, pour tout réel k appartenant à $f(\text{I})$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans l'intervalle I.

Cela revient à dire que f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $f(\text{I})$: tout réel de I a une seule image dans $f(\text{I})$ par f et tout réel de $f(\text{I})$ a un unique antécédant dans I par f.

4. Exercices.

a/ Encadrer les solutions d'une équation.

Démontrer que l'équation $\sqrt{x} = \dfrac{5}{x-2}$ admet une unique solution réelle α, puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

b/ Dénombrer les solutions d'une équation.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Dénombrer les solutions des équations suivantes : $f(x) = -1$ et $f(x) = -5$.

PRESENTATION DES SUITES ET RECURRENCE

I. Notion de suite.

1. Une suite est une application de $\mathbb{N}$ (ou parfois de $\mathbb{N}^*$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La suite $\begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u_n \end{array}$ est notée de plusieurs façons :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (u_n) ou parfois u

2. Deux façons de définir une suite.

a/ Suites définies par la donnée explicite de leurs termes.

C'est le cas, par exemple des suites (u_n) et (v_n) respectivement définies par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = f(n)$, où f est la fonction $[x \longmapsto x^2 + 3x - 1]$. sur $\mathbb{R}^+$

b/ Suites définies par un terme et une relation de récurrence.

C'est le cas, par exemple des suites (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n + 1$ pour tout entier naturel n.
Remarquons que pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction $[x \longmapsto x + 1]$.

$\rightarrow$ peut-ê sur $\mathbb{R}$

II. Suites arithmétiques et géométriques.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Alors, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \ldots \frac{n(n+1)}{2}$ $(S + S = 2S)$

$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \ldots \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q^n - 1)$

2.

	Suite arithmétique de raison r		Suite géométrique de raison q	
définition par une relation de récurrence	Premier terme : U_0 Relaᵒ de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + R$		$\begin{cases} U_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = qU_n \end{cases}$	
formule explicite du terme de rang n	Si 1er terme est U_0 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 + nR$	Si 1er terme est U_1 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_N = U_1 + (n-1)R$	Si 1er terme est U_0 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times q^n$	Si 1er terme est U_1 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = U_1 \times q^{(n-1)}$
somme de $n + 1$ termes consécutifs : $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{p+n} =$	$\sum_{k=p}^{p+n} U_k = \frac{(n+1)(U_p + U_{p+n})}{2}$		$\sum_{k=p}^{p+n} U_k = U_p \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$	

Nbr de termes

$\boxed{\frac{\text{1er} + \text{dernier}}{2}}$

$\rightarrow$ moyenne arithmétiq

3. Théorème : Soit $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Note : Ts les thᵉ sur les limites vus pr les fonc° restent valables.
Ex (limite d'une composée) : $\lim_{n \to +\infty} V_n = b \wedge \lim_{x \to b} f(x) = c \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(V_n) = c$

II. Comportement global d'une suite.

1. Sens de variation d'une suite.

a/ Définitions :

- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante si et seulement si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang : $\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante à partir de son premier terme.
- Une suite est périodique s'il existe un entier N tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+N} = u_n$.

b/ Méthodes pour montrer qu'une suite est croissante :

- Méthode directe.
  Exemple : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son terme général $u_n = 4n + 1 + 2^n$.
- Etude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
  Exemple 1 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son terme général $u_n = \cos(n^2) - 2n$.
  Exemple 2 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n+1}$.
- Comparaison du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 (après avoir vérifié que tous les termes sont strictement positifs).
  Exemple : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son terme général $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$.
- Etude des variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction f dans le cas où (u_n) est définie par $(u_n) = f(n)$.
  Exemple : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son terme général $u_n = \dfrac{1 - n^2}{n+2}$.
- Par récurrence.
  Exemple : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5}$.

2. Suite majorée, minorée, bornée.

a/ Définitions :

- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée ssi il existe un réel M (indépendant de n) tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée ssi il existe un réel m (indépendant de n) tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.
  ssi il existe deux réels m et M tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$.
  ssi il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

b/ Exemples :

- Soit $(un)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{-2n^2 + 1}{n^2 + 4}$.
  Démontrer que (u_n) est bornée.
- Soit $(un)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 1$.
  Démontrer que (u_n) est bornée par 0 et 9.

c/ Conséq^{ces} :

- Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et monotone sur $[A ; +\infty]$, alors elle est convergente
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est définie par récurrence tel que : $u_{n+1} = f(u_n)$, alors sa limite est une sol° de l'équa° $x = f(x)$.

Démo : Soit ℓ, la limite de (u_n), $\ell \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(\ell)$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$ (1)

et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ (2)

Or $u_{n+1} = f(u_n)$ (3)

De (1), (2) et (3), on a ℓ qui vérifie $f(\ell) = \ell$.

Donc ℓ est une sol° de l'équa° $f(x) = x$.

3. Suites adjacentes

a/ Définition :

(u_n) et (v_n) st adjacentes ssi l'une est croissante, l'autre décroissante, et $(u_n - v_n)$ est convergente.

b/ Propriété :

Si (u_n) et (v_n) st adjacentes, alors elles st convergentes et ont la m̄ limite

Démo : - $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

- $\lim(u_n - v_n) = 0 \Rightarrow \ell - \ell' = 0$

4. Limites

Th$^{\bar{e}}$ sur les fonc° | ex : Pr (u_n) et (v_n) converg^{t} et $u_n < v_n$: $\lim(v_n - u_n) \leq 0 \Rightarrow \lim v_n \leq \lim u_n$ (car les suites st convergentes)

Dérivation et fonction tan

Dans tout ce chapitre, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

1 Fonction dérivée

1.1 Nombre dérivé en un point

Proposition 1 Soit f une fonction définie sur I et a un point de I. Soit $l \in \mathbb{R}$. Les trois énoncés suivants sont équivalents :

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie l en a.
2. La fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie l en zéro.
3. Il existe une fonction ε telle que pour tout réel h voisin de zéro, $f(a+h) = f(a) + l \times h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

<u>Définition</u> 1 *Lorsque l'une des 3 conditions précédentes est réalisée, on dit que f est dérivable en a. Le réel l est appelé nombre dérivé de f en a, on le note $f'(a)$.*

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} \overbrace{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

accroissement moyen entre a et x def

Proposition 2 Si une fonction est dérivable en un point a, alors elle est continue en a.

Interprétation graphique : Soit f une fonction dérivable en un réel a de I et Γ sa représentation graphique. La tangente à Γ au point $A(a, f(a))$ est la droite passant par A, de coefficient directeur $f'(a)$. L'équation réduite de cette tangente est :

$$\mathcal{T} : \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$M(x,y) \in \mathcal{T} \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-a \\ y-f(a) \end{pmatrix}$ col $\vec{u}$

$\iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

$\iff f'(a)(x-a) - (y - f(a)) \times 1 = 0$

$\iff y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Plus simplement : $f'(a) = \dfrac{y - f(a)}{x-a}$

Approx. Affine Locale : Ds un voisinage de a, $f(x) \simeq f'(a)(x-a) + f(a)$

1.2 Dérivées des fonctions usuelles

<u>Définition</u> 2 *On dit qu'une fonction f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I. On définit alors la* fonction dérivée *de f sur I par $x \longmapsto f'(x)$.*

fonction f	derivable sur I	derivee f'
$f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$I =]0, +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$I =]0, +\infty[$ $I =]-\infty, 0[$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$I = \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Formules de généralisation :

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\qquad$ $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$

1.3 Opérations sur les fonctions dérivables

<u>Théorème</u> 3 Soit u et v deux fonctions dérivables sur I. Alors

1. la fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$
2. la fonction $u.v$ est dérivable sur I et $(u.v)' = u'v + v'u$
3. si de plus pour tout réel $x \in I$, $v(x) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2} \quad ; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

1.4 Composée de 2 fonc°

g est dérivable sur J, u est dérivable sur I.
$\forall x \in I$, $u(x) \in J$
Ns avons de f définie par $f(x) = g(u(x))$, dérivable sur I et
$\forall x \in I$, $\underline{f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)}$
↳ $g \circ u$
↳ u suivie de g

<u>Rmq</u>: cf démonstra°
<u>PS</u> : $\frac{g(u(x)) - g(u(a))}{x-a} = \frac{g(u(x)) - g(u(a))}{u(x) - u(a)} \times \frac{u(x) - u(a)}{x-a}$

2 Applications de la dérivation

2.1 Variations d'une fonction

<u>Théorème</u> 4

Soit f une fonction dérivable sur un *intervalle* I.

- Si la dérivée f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si la dérivée f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.
- Si la dérivée f' est strictement négative sur I (sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule), alors f est strictement décroissante sur I.

2.2 Extréma d'une fonction

Proposition 5 Soit f une fonction dérivable sur un *intervalle* ouvert I. Soit a un élément de I.

- Si f admet un extrémum local en a, alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a, alors f admet un extrémum local en a.

3 _ Etude de la fonc° tan

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

+ $D_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\pi + \frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$

+ $D_{\tan}$ est centré en 0.

$\forall x \in D_{\tan}, \ \tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$

$= -\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\tan(-x) = -\tan x$

Dc tan est impaire (1)

+ $\forall x \in D_{\tan}, (x+\pi) \in D_{\tan}$

$\forall x \in D_{\tan}, \ \tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$

$= \dfrac{-\sin x}{-\cos x}$

$\tan(x+\pi) = \tan x$

Dc tan est périodiQ, de période π. (2)

+ De (1) et (2), on peut alors étudier tan sur $\left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[$.

+ cos est dérivable et ne s'annule pas sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, dc $\left[x \mapsto \frac{1}{\cos x}\right]$ est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ et sin est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$

Dc tan est dérivable est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$

$\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[, \ \tan' x = \dfrac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x}$

$= \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\tan' x = 1 + \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x$

$$\left.\begin{array}{l} + \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0 \\ \forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[, \cos x > 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} = +\infty$$

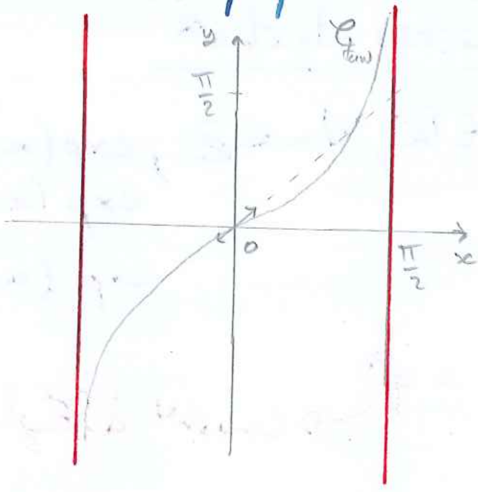
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$

Dc $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$ $\mathcal{C}_{\tan}$ admet alors une asymptote verticale $d : x = \frac{\pi}{2}$

+

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$	1	$+$	‖
$\tan x$	0	↗	$+\infty$ ‖

+



La Fonction Exponentielle

I _ Déf°

- Théorème : $\exists$ une uniQ fonc° f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.
Cette fonc° est appelée exponentielle (déf°) et notée exp.
- Démonstra° : + L'$\exists$^{ce} d'une telle fonc° est momentanément admise et ne pourra ê justifiée correctement qu'après l'étude de la fonc° ln.
+ Unicité :

On suppose qu'il $\exists$ f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.
On pose : ↳ Nous savons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de 2 fonc° dérivables sur $\mathbb{R}$).

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \left(\frac{f(x)}{\exp(x)}\right)'$$
$$= \frac{f'(x)\exp(x) - f(x)\exp'(x)}{[\exp(x)]^2}$$
$$g'(x) = 0$$

$$g(0) = \frac{f(0)}{\exp(0)}$$
$$= f(0)$$
$$g(0) = 1$$

Finalet g est const^{te} sur $\mathbb{R}$ et égale à 1.

Dc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1$

$$\frac{f(x)}{\exp(x)} = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(x)$$

Finalet, exp est une fonc° uniQ.

II _ Propriétés algébrQ

1 _ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\underset{e^{x+y} = e^x \times e^y}{\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$$
$$\underset{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}{\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}}$$
$$\underset{e^{nx} = (e^x)^n}{\exp(nx) = [\exp(x)]^n}$$

$\exp(x) = e^x$
↳ const^{te} d'Euler

Théorèmes :

Soit k un réel fixé.

a. Les fonc° f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'=kf$ st les fonc° $[x \mapsto Ae^{kx}]$, où A est une constᴺ réelle.

b. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists f$ uniQ, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f'=kf$ et $f(0)=a$.
C'est la fonc° $[x \mapsto ae^{kx}]$

Rmq : La condi° $f(0)=a$, s'appelle en PhysiQ "condi° initialᴸ" $\left[\begin{array}{l} \dot{x}+kx=0 \\ \text{à } t=0,\ x=a \end{array}\right]$

Démonstra° a

+ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ae^{kx}$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = A(kx)'e^{kx} = Ake^{kx} = k(Ae^{kx})$$
$$f'(x) = kf(x)$$

Dc f est sol° de l'équa° ≠ᴺᴸ $f'=kf$ (1) ∃ᴺ

+ Soit f, une $\left\{\begin{array}{l}\text{sol° de l'équa° } f'=kf \\ \text{fonc° telle que}\end{array}\right.$

On pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{kx}}$ (car $e^{kx}>0$)

g est le produit de 2 fonc° dérivables sur $\mathbb{R}$, dc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$[x \mapsto f(x)]$ et $[x \mapsto e^{-kx}]$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{f'(x)e^{kx} - (e^{kx})'f(x)}{(e^{kx})^2} = \frac{ke^{kx} \times f(x) - ke^{kx} \times f(x)}{(e^{kx})^2}$$
$$g'(x) = 0$$

Dc g est une fonc° constante
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = A$, A étᴺ une constᴺ
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = Ae^{kx}$ (2) Unicité

+ Dc, de (1) et (2) on a + a.

Démonstra° b

+ Les sol° de l'équa° $f'=kf$ st de la forme $[x \mapsto Ae^{kx}]$ av $A \in \mathbb{R}$
$f(0)=a \iff Ae^{k \times 0} = a$
$\iff A = a$

L'équa° $f'=kf$ admet une uniQ sol° telle que $f(0)=a$. C'est la fonc° $[x \mapsto ae^{kx}]$ (+ b)

III _ Etude de la fonc° exp

1 _ Conséqu de la déf°

a _ Signe et sens de varia°

exp est strictᵗ positive et croisᴺ sur $\mathbb{R}$.

b _ Approxima° affine au voisinage de 0

$T_{\exp 0} = \exp'(0)(x-0) + \exp(0)$
$= x+1$

Démonstra°:

+ Soit $f(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ (On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$)

f est le produit de 2 fonc° dérivables sur $\mathbb{R}$, dc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}\right)'$

$$= \frac{[\exp(x+y)]'\exp(x) - \exp'(x)[\exp(x+y)]}{[\exp(x)]^2}$$

$$= \frac{\exp'(x+y)\exp(x)\cancel{(x+y)}' - \exp(x)\exp(x+y)}{[\exp(x)]^2}$$

$$= \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{[\exp(x)]^2}$$

$f'(x) = 0$

Dc f est constante et $f(0) = \exp(y)$.

Dc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(y)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$

$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

La démonstra° a été faite pour une val^{U} quelconque de y, dc:

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

+ $\exp(x-y) = \exp(x+(-y))$
$= \exp(x)\exp(-y)$

$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

+ Par récurrence ($\forall n \in \mathbb{N}$), pr avoir $m \in \mathbb{Z}$ on pose $m = -n$

2 _ Une nvlle nota°: On note : $\exp(1) = e^1 = e$ ∈ nbr exponentiel

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = e^n$

$$\boxed{e \simeq 2{,}718}^{281828}$$

La méthode d'Euler ns donne une bonne approxima° de la fonc° exp.

Par conven°, on note e^x au lieu de $\exp(x)$ pr ∀ réel x.

Les règles de calcul s'écrivent alors :

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$:

$e^0 = 1$	$e^1 = e$
$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$	$e^{x+y} = e^x \times e^y$
$e^{nx} = (e^x)^n$	$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

3 _ Sol^{o} de l'équa° différentielle du 1er ordre sans second membre à coefficien const^{N}:

$f' - kf = 0$

D f' $-\underline{k}f = 0$
const^{N} $\neq \underline{a(t)}f$
non const^{N}

ordre → car f'
2nd ordre $f'' = (f')'$ 2 fois
k^e ordre $f^{(k)} = (f')^{'\ldots}$

second membre → $f' \ldots = 0$ = const^{N}

4 _ Croissᴺ comparées

+ **Propriétés**

$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ $\Big\}$ — e^x l'emporte tjr en l'∞ sur n'importe quel polynôme

1000^n _ e^{1000}

+ **Démonstraᵒ (exo)**

1a _ Démontrer que $\forall x \geqslant 1, e^x \geqslant x^2$

On pose $\forall x \geqslant 1, f(x) = e^x - x^2$

$\forall x \geqslant 1, f'(x) = e^x - 2x$

$\forall x \geqslant 1, f''(x) = e^x - 2$

$\forall x \geqslant 1, f''(x) \geqslant e^1 - 2$ (car exp est ↗ sur $[1; +\infty[$)

$f''(x) > 0$

Dc f' est strictᵗ ↗ sur $[1, +\infty[$

$\forall x \geqslant 1, f'(x) \geqslant e^1 - 2 \times 1$

$f'(x) > 0$

Dc f est strictᵗ ↗ sur $[1; +\infty[$

$\forall x \geqslant 1, f(x) \geqslant e^1 - 1^2$

$f(x) > 0$

$\forall x \geqslant 1, e^x > x^2$

_ En déduire la limite en $+\infty$ de $\frac{e^x}{x}$

$\forall x \geqslant 1, \frac{e^x}{x} > x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, donc :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

b _ Chercher la limite en $-\infty$ de xe^x.

On pose $X = -x$, donc $xe^x = -Xe^{-X} = -\frac{X}{e^X}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{-X}{e^X} = 0$$

Finalᵗ, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

2 _ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a _ Vérifier que $\forall x \neq 0$, on a $\frac{e^x}{x^n} = A\left(\frac{e^t}{t}\right)^n$ où $t = \frac{x}{n}$ et A est une constᴺ

$\forall x \neq 0, \left(\frac{e^t}{t}\right)^n = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$

$\left(\frac{e^t}{t}\right)^n = \frac{n^n e^x}{x^n}$

$\forall x \neq 0, \frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^t}{t}\right)^n$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

La fonc° qui a x associe $1+x$ $[x \mapsto 1+x]$ est la meilleure approxima° affine de la fonc° exp au voisinage de 0.
Pr x voisin de 0, $e^x \simeq 1+x$

Dém : + $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x-0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$

+ La tangente à $\mathcal{C}_{exp}$ au point d'abscisse 0, pr équa° $y = 1+x$

2_ Limites en ∞

a) $\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ b) et $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$

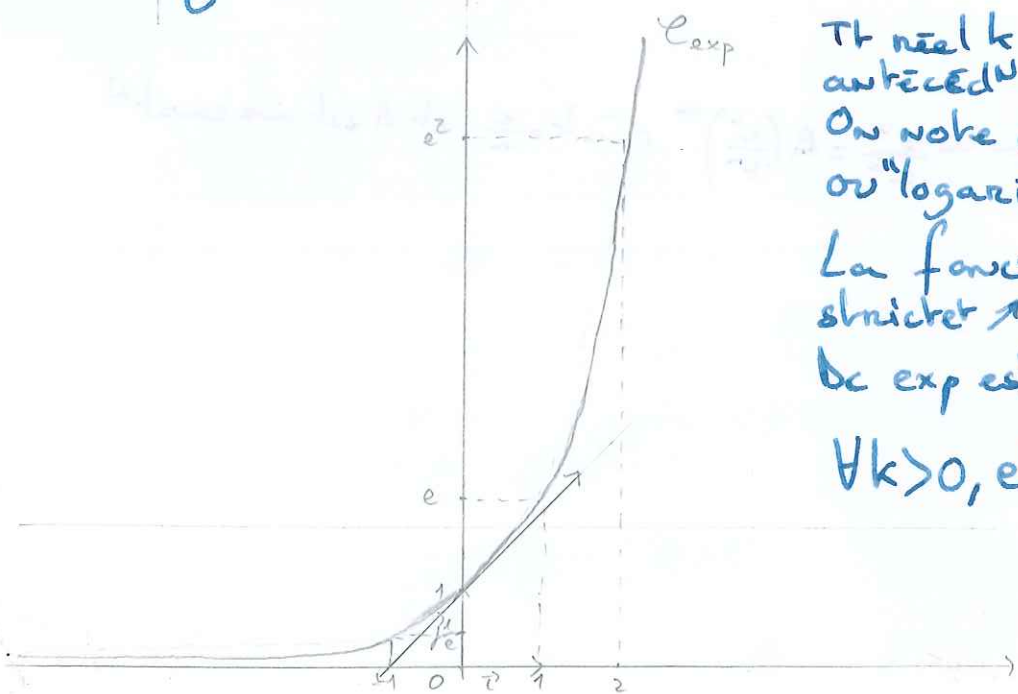
a) Soit $M \in \mathbb{R}$ quelconque (aussi grd que l'on veut). Il s'agit de démontrer que $\forall x$ fixé assez grd, $\exp(x) > \exp(M)$.
Il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $e^p > M$
La fonc° exp étant strictt $\nearrow$, $\forall x \geqslant p$, $e^x > M$

b) On pose $X = -x$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} X = +\infty \\ \lim\limits_{X\to +\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty \end{array}\right\} \text{Dc : } \lim_{x\to -\infty} e^x = 0$$

3_ Tabl^x de varia° et graph

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(e^x)' = e^x$		+	
e^x	0 $\nearrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$



Tt réel k strictt positif a dc un antécéd^N uniq par la fonc° exp.
On note cet antécéd^N $\ln k$ ("ln de k") ou "logarithme népérien de k" "elle ène de k".
La fonc° exp est continue et strictt $\nearrow^N$ sur $\mathbb{R}$ et $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{*+}$
Dc exp est la bijec° de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}^{*+}$.

$\forall k > 0, e^{\ln k} = k$

+ Extens° des résultats

Ex1 : $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

$f(x) = \frac{\frac{e^x}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

Finalet $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

En prat^Q, on écrit directet ; d'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = +\infty$

(car « à l'infini, l'exponentiel de x l'emporte sur tte puiss° de x »)

⟶ ou « x est négligeable devant e »

Ex2 : $f(x) = (x^3+5x-1)e^x$

$f(x) = x^3\left(1+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)e^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^x = 0$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) = 1$

Finalet $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

En prat^Q, on écrit directet ; d'après le cours, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+5x-1)e^x = 0$

(car « à l'infini, l'exponentiel de x l'emporte sur tte puiss° de x »)

5_ Dérivée de $e^{u(x)}$

Soit u, dérivable sur I, alors $\exp\circ u$ est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$

Dém : $(u\circ v)' = v'\times u'(v)$ or si $u = \exp$, alors $(\exp\circ v)' = v'\cancel{\exp(v)} = v'e^v$

IV - Equa° $\neq^L$ $y' = ay+b$

Dire que f est sol° de l'équa° $\neq^L$ $y' = ay+b$ signifie que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = af(x)+b$

1_ Sol° général

+ Th$^{\bar{e}}$: Soit l'équa° $\neq^L$ $y' = ay+b$ $(a\neq 0, b\neq 0)$. Ses sol° ds $\mathbb{R}$ st les fonc° f_k, telles que : $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ $(k\in\mathbb{R})$

+ Dém° : + Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$; on suppose que f est sol° de (E).

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = af(x)+b$

On pose : $g(x) = f(x)+\frac{b}{a}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f'(x) = af(x)+b = ag(x)$

Donc g est sol° de l'équa° $\neq^L$ $y' = ay$ $(a\neq 0)$

Finalet, g est de la forme $x\mapsto ke^{ax}$ où k est un réel.

+ Tte fonc° f de la forme $x\mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ est sol° de (E) car :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = kae^{ax}$ et $f'(x) = af(x)+b$

Finalet, les sol° de (E) ds $\mathbb{R}$ st les fonc° f_k définies ds $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

2_ Sol° général ac condi° initiales cf (Livre)

Les Nombres complexes

Intro :

- Dans $(\mathbb{N}, +, \times)$, l'équa° $x + a = b$ n'a de solu° que si $a \leq b$.
corps : ensemble qui formalise l'arithmétique
Ex : $x + 5 = 3$ n'a pas de solu° ds $\mathbb{N}$.

- Dans $(\mathbb{Z}, +, \times)$, l'équa° $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ n'a de sol° que si b est multiple de a. Ex : $3x + 5 = 0$ n'a pas de sol° ds $\mathbb{Z}$.

- Dans $(\mathbb{Q}, +, \times)$, l'équa° $x^2 = 2$ n'a pas de sol° (ds $\mathbb{Z}$) [référ° aux Pythagoriciens]

- Dans $(\mathbb{R}, +, \times)$, l'équa° $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ n'a de sol° que si $\Delta = b^2 + 4ac \geq 0$. Ex : $x^2 + 7 = 0$ n'a pas de sol° ds $\mathbb{R}$.

Si l'on peut imaginer un ensemble de nbr contenant $\mathbb{R}$, muni de +° et de ×°, qui a les ≠ propriétés que $(\mathbb{R}, +, \times)$, et qui contient en + un nbr dt le carré est égal à -1, alors tte équa° $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ aura 2 sol° (éventuellt une sol° double). En effet, si on appelle i, le nbr tel que $i^2 = -1$ (ce nbr là n'est pas un réel) l'équa° $x^2 = -1$ peut s'écrire $x^2 - i^2 = 0$ soit $(x-i)(x+i) = 0$ et a 2 sol° (qui st $-i$ et i).

Ex : Dans ce nvl ensemble, résoudre :

⚠ La $\sqrt{\ }$ est définie pour les réel positifs ⚠

+ $x^2 = -7$
$x^2 - 7i^2 = 0$
$(x - \sqrt{7}i)(x + \sqrt{7}i) = 0$
$\mathcal{S} = \{-\sqrt{7}i ; \sqrt{7}i\}$

+ $2x^2 + x + 1 = 0$
$\Delta = -7$
$(E) \iff 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$
$\iff 2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right) = 0$
$\iff 2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{7}}{4}\right)^2\right) = 0$
$\iff \left(x - \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4}\right)\left(x - \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}\right) = 0$
$\iff x = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4}$ ou $x = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}$

I - Définition

1 - Théorème (admis)

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nbr complexes vérifie :
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- l'+° et la ×° utilisées de $\mathbb{R}$, peuvent ê, par extension, utilisées ds $\mathbb{C}$ en gardant les ≠ propriétés (associativité, commutativité, distributivité)
- $\mathbb{C}$ contient un élément i, tel que $i^2 = -1$ $(i \notin \mathbb{R})$
- Tt élément de $\mathbb{C}$ peut s'écrire $z = a + ib$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$

L'écriture $a + ib$ est appellée l'écriture algébrique (ou cartésienne) → cf II du complexe.

Remarque : Tt nbr réel x est complexe, en effet : $x = x + i0$

2 – Vocabul^R

Soit z un complexe, il existe un uniq^e couple (a, b) ds $\mathbb{R}^2$, tel que : $z = a + ib$

$a \rightarrow$ partie réelle $\quad Re(z) = a$

$b \rightarrow$ partie imagin^R $\quad Im(z) = b \quad$ ⚠ $Re(z) \in \mathbb{R}$ et $Im(z) \in \mathbb{R}$

Ex : $Re(2+3i) = 2$ et $Im(2+3i) = 3$

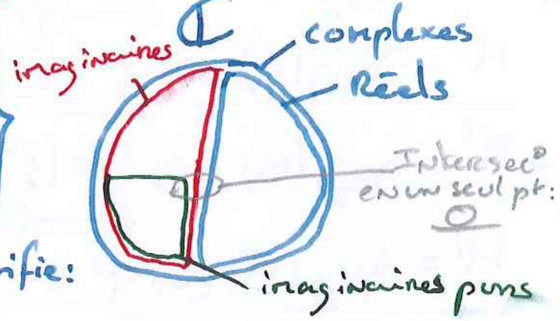
3 – Définit° et propriétés

$z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0$

z est imaginaire $\iff Im(z) \neq 0$

z est imaginaire pur $\iff Re(z) = 0$ et $Im(z) \neq 0$

→ Faux : 0 est à la fois réel et Imaginaire



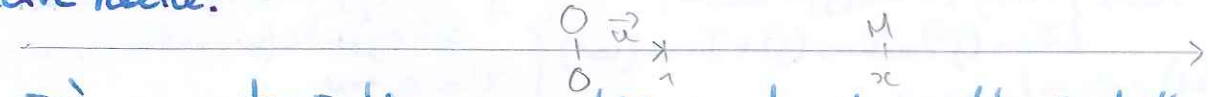
La forme algébr^q de z est uniq^e, ce qui signifie :

$a + ib = a' + ib' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$ $(a, a', b, b'$ étant réels$)$

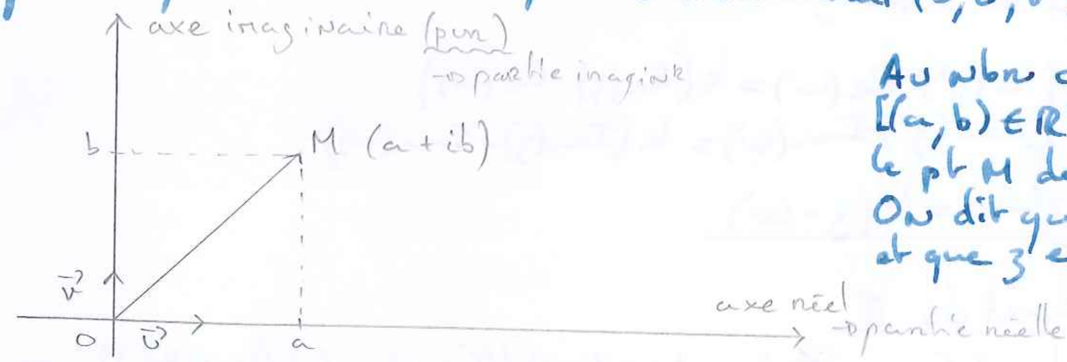
II – Représentat° ponctuelle et vectorielle des complexes

Il existe une bijec° entre l'ensemble des réels, et l'ensemble des pts d'un axe (Cha^q pt d'un axe muni d'un repère $(O, \vec{u})$ est associé de m̄ uniq^e à un réel, son abscisse).

La droite réelle :



De la m̄ m̄, on peut réaliser une bij^ec° entre l'ensemble $\mathbb{C}$ et l'ensemble des pts du plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$



Au nbre complexe $z = a + ib$ $[(a, b) \in \mathbb{R}^2]$, on fait correspondre le pt M de coordonnées (a, b). On dit que M est l'image de z et que z est l'affixe.

$\vec{OM}$ est l'image vectorielle de z.

La longu° OM est appelée **module** de z, noté $|z|$.

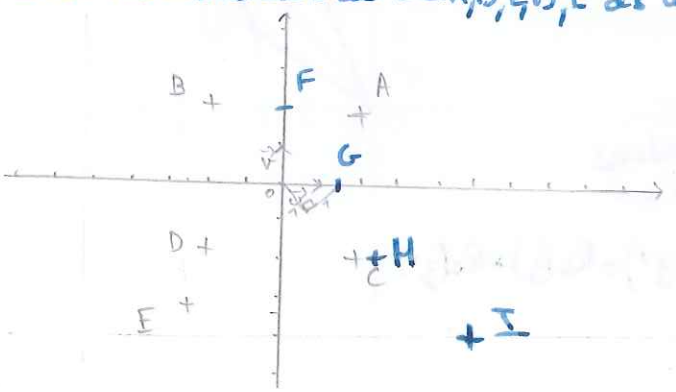
$$|z| = d(O, M) = \|\vec{OM}\| = OM$$

Module — distance — norme

Dans $\mathbb{C}$ — Ds le plan (repère) — Ds le plan vectoriel (base)

Si z est un réel : $|z| = |z|$ → val° absolue / module

Ex : Lire les coordonnées de A, B, C, D, E ds le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ associé au plan complexe.



$z(A) = 2 + 2i$

$z(B) = -2 + 2i$

$z(C) = 2 - 2i$

$z(D) = -2 - 2i$

$z(E) = -3{,}5 - 3{,}5i$

$z(F) = 2i$

$z(G) = \sqrt{2}$

$z(H) = \frac{5}{2} - 2i$

$z(I) = 5 - 4i$

Rem $z(E) = -\frac{5 + 7i}{2}$, ms ce n'est pas l'écriture algébr^q

Pour $z = a+ib$ $((a,b)\in\mathbb{R}^2)$: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$M(z)\in(Ox) \iff z\in\mathbb{R}$

$M(z)\in(Oy) \iff z$ est imagin^re pure

Expressions analytiques:

+ $M' = s_{(Ox)}(M) \iff \begin{cases} Re(z')=Re(z)\\ Im(z') = -Im(z)\end{cases}$

$M' = s_{(Ox)}(M) \iff \boxed{z'=\bar{z}} \longrightarrow$ $\bar{z}$ est le conjugué de z : $z = x+iy$
$\bar{z} = x-iy$

+ $M' = s_{(Oy)}(M) \iff \begin{cases} Re(z')=-Re(z)\\ Im(z') = Im(z)\end{cases}$

$M' = s_{(Oy)}(M) \iff z' = -\bar{z}$

+ $M' = s_O(M) \iff \begin{cases} Re(z')=-Re(z)\\ Im(z') = -Im(z)\end{cases}$

$M' = s_O(M) \iff z' = -z$

+ Soit $\vec{w}$, le vect^u d'affixe w

$M' = t_{\vec{w}}(M) \iff \begin{cases} Re(z')=Re(z)+Re(w)\\ Im(z') = Im(z)+Im(w)\end{cases}$

$M' = t_{\vec{w}}(M) \iff z' = z+w$

$z' = Re(z') + iIm(z')$
$= Re(z) + Re(w) + iIm(z) + iIm(w)$
$z' = z+w$

+ Soit Ω, d'affixe ω et $k\neq 0$

$M' = h_{(\Omega,k)}(M) \iff \begin{cases} Re(z')-Re(\omega)=k(Re(z)-Re(\omega))\\ Im(z')-Im(\omega) = k(Im(z)-Im(\omega))\end{cases}$

$M' = h_{(\Omega,k)}(M) \iff z'-\omega = k(z-\omega)$

III _ Règles de calcul ds $\mathbb{C}$

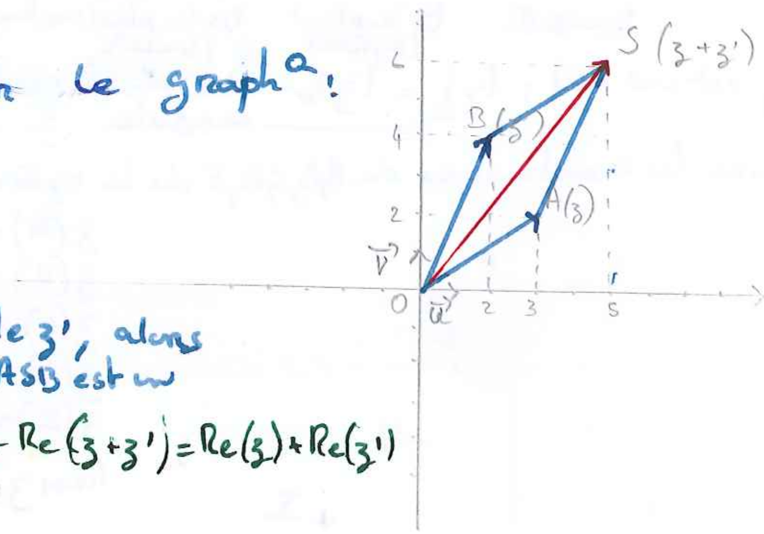
Considérons z et z' $(z = a+ib,\ z' = a'+ib'\ ((a,b,a',b')\in\mathbb{R}^{*4}))$

Ds $\mathbb{C}$, on peut effectuer les opéra° (+° et ×°) en suiv^t les = règles que ds $\mathbb{R}$. La ×° et +° st commutatives & associatives, et la multiplica° est distributive par rapport à l'+°.

1_ L'+° des complexes

$z+z' = (a+ib)+(a'+ib')$
$z+z' = (a+a')+i(b+b')$
$Re(z+z') = Re(z)+Re(z')$
$Im(z+z') = Im(z)+Im(z')$

Sur le graph^a:



Si A est l'image de z et B celle de z', alors S d'affixe $(z+z')$ est tel que OASB est un parallélogramme.

$\vec{OS} = \vec{OA}+\vec{OB}$ $\left(\vec{OS}\begin{pmatrix}a+a'\\ b+b'\end{pmatrix}\right) \leftarrow Re(z+z') = Re(z)+Re(z')$

_ $\Delta > 0$ P admet 2 racines réelles distinctes

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $P(z) = a(z-z_1)(z-z_2)$

_ $\Delta < 0$

$$P(z) = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{i^2(-\Delta)}{4a^2}\right]$$

$$P(z) = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$P(z) = a\left(z+\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

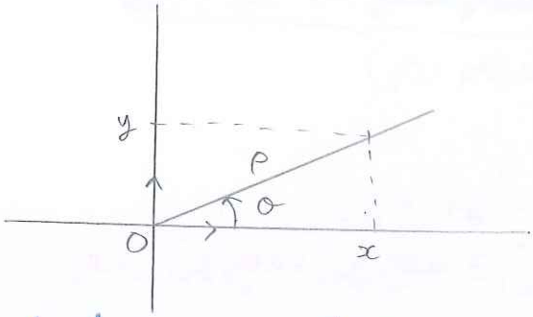
$$\begin{pmatrix} z^2 + z'^2 = (z+iz')(z-iz') \\ z^2 - z'^2 = (z-z')(z+z') \end{pmatrix}$$

Note $\bar{z}_2 = z_1 \Rightarrow$ P admet 2 racines complexes conjuguées

V _ Forme trigonométrique d'un complexe

1. Rappels : coordonnées polaires

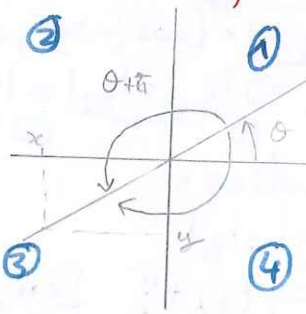
La forme géométrique d'un complexe est bien adaptée à l'utilisation d'un repère cartésien. Dans cette partie, on va présenter une écriture adaptée à l'utilisation d'un repère à coordonnées polaires.



$\theta \equiv (\vec{u}, \vec{OM})$ $(+2k\pi, k \in \mathbb{Z})$ ou $[2\pi]$

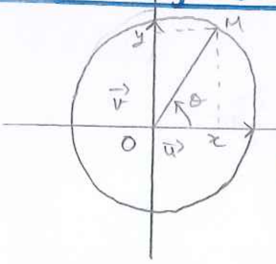
$\rho = OM$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$



$\boxed{\text{1, 2, 3, 4 sont des quarts de plan}}$

Cercle trigonométrique



$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 = OM}$

Remarque :

$OM^2 = \rho^2 = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta$

$= \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$x^2 + y^2 = \rho^2$

Soit $M(z)$ (ou $\vec{OM}(z)$)

$z = x + iy = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

Forme trigo

ρ est le module de z

$|z| = \rho$

Déf°

θ est un argument de z

On note $\arg(z) \equiv \theta$ $[2\pi]$

Si $\theta \in]-\pi ; \pi]$ est la valeur principale de l'argument

2. Forme trigo et algébrique

a _ F. trigo → algé

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

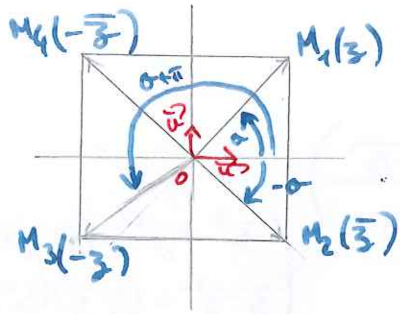
b _ F. Algé → trigo

$$\begin{cases} \rho = |z| = \\ \cos\theta = \frac{x}{\rho} \\ \sin\theta = \frac{y}{\rho} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

3 _ Propriétés

+ $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \wedge z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \wedge \begin{cases} \theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi] \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$

+ 

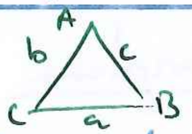
$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$

$\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi \ [2\pi]$

$\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \sin(-\theta) = -\sin\theta \end{cases}$

$\begin{cases} \cos(\theta+\pi) = -\cos\theta \\ \sin(\theta+\pi) = -\sin\theta \end{cases}$

+ Opéra° sur les complexes (en écriture trigo)

Rappel (Al-Kashi) :  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$

(La somme est plus complexe ac les complexes) →

+ Produit

$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \wedge z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$z_1 z_2 = |z_1| \times |z_2| \times (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= |z_1| \times |z_2| \times [\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + \underbrace{i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)}_{+ i\sin(\theta_1+\theta_2)}]$

$\underset{①}{=} |z_1| \times |z_2| \times \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$

$z_1 z_2 \underset{②}{=} |z_1 z_2| \times [\cos(\arg(z_1 z_2)) + i\sin(\arg(z_1 z_2))]$

$(z_1 z_2 = z_1 z_2 \Rightarrow \underset{①}{|z_1| \times |z_2|} = \underset{②}{|z_1 z_2|})$ $\Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$

$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \ [2\pi]$

Cas particulier :

$|iz| = |i| \times |z| = |z|$

$\arg(iz) = \arg(z) + \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

$\Rightarrow$ expression complexe de r : $r_{(O,\frac{\pi}{2})}(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = iz$

+ Puissances

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |z|^n = |z|^n \\ \arg(z^n) \equiv n\arg(z) \ [2\pi] \end{cases}$

Démonstra° : par récurrence

→ Conséq^{u} : (en pren^{N} : $z = \cos\theta + i\sin\theta$)

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \mathbb{R}, \boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)}$ Formule de Moivre

+ Quotient

Th^{e} : Soit z un complexe, et z' un complexe non nul.

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Démonstra° : On pose $Z = \frac{z}{z'}$, on a alors $z = Zz'$ → $|Z| = \left|\frac{z}{z'}\right|$ et $|z| = |Zz'| = |Z| \times |z'|$

$\Rightarrow |Z| = \frac{|z|}{|z'|} = \left|\frac{z}{z'}\right|$ Et $\arg(z) = \arg(Z) + \arg(z') = \arg(z) \Rightarrow \arg(Z) = \arg(z) - \arg(z') = \arg\left(\frac{z}{z'}\right)$

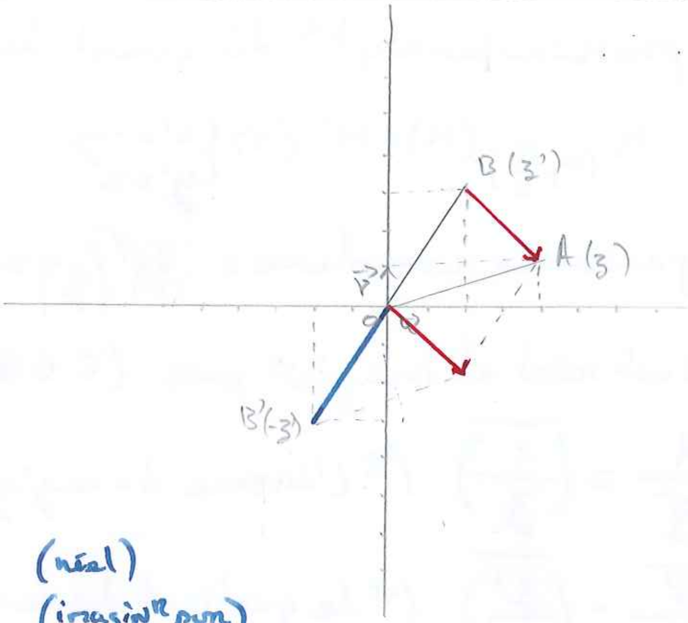
Soit $B' = s_O(B)$

B' a pr affixe $(-z')$

$\vec{OA} + \vec{OB'} = \vec{BO} + \vec{OA}$
$= \vec{BA}$

$\vec{BA}$ a pr affixe $(z - z')$

(On a bien $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$)



Rem: L'affixe d'un vect $\vec{u}$:

$$z_{\vec{AB}} = z_{\vec{B}} - z_{\vec{A}}$$
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

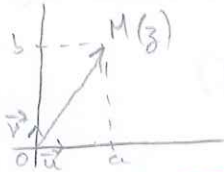
Cas particuliers: $\boxed{\begin{matrix} z + \bar{z} = 2a \\ z - \bar{z} = 2ib \end{matrix}}$ (réel) (imagin^re pur)

2 - La x° des complexes

$z \times z' = (a + ib)(a' + ib')$

$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Cas particulier : $z \times \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$



$OM^2 = \|\vec{OM}\|^2 = a^2 + b^2$

carré du module de z : $|z|^2 = a^2 + b^2$

(a et b ne st pas ts les 2 nuls)

→ Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}$

→ $(a,b) \neq (0,0)$

→ $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{(a+ib)(a-ib)}$

$\boxed{\frac{1}{i} = -i}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{-b}{a^2+b^2} \left(= \frac{a}{|z|^2} + i\,\frac{b}{|z|^2} \right)$$

$Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2+b^2}$ et $Im\left(\frac{1}{z} = \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

→ Si $z' \neq 0$, $\frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2} + i\,\frac{a'b - ab'}{(a')^2 + (b')^2}$

3 - Les puiss^n des complexes

z^n se définit comme x^n :

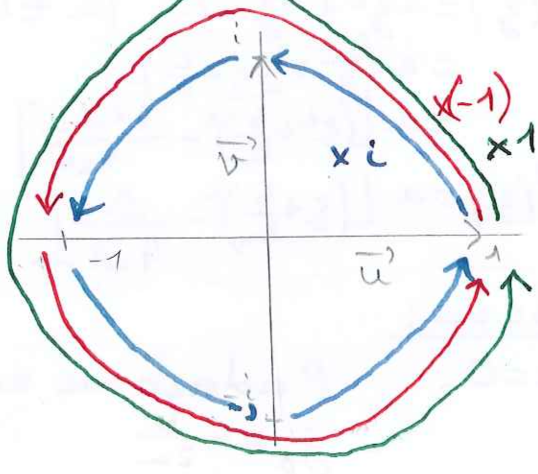
$z^0 = 1$
$z^1 = z$
$n \in \mathbb{N}$, $z^n = z^{n-1} z$
$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$

Puiss^n de i, -1 et 1 :

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
Période 4

$(-1)^0 = 1$
$(-1)^1 = -1$
$(-1)^2 = 1$
Période 2

$1^0 = 1$
$1^1 = 1$
Période 1



Expression analytique du quart de tour de centre O :

$$r_{(O,\frac{\pi}{2})}(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-y \\ y'=x \end{cases}$$

Expression complexe : $M'(z') = r_{(O,\frac{\pi}{2})}(M(z)) \Leftrightarrow z' = iz$

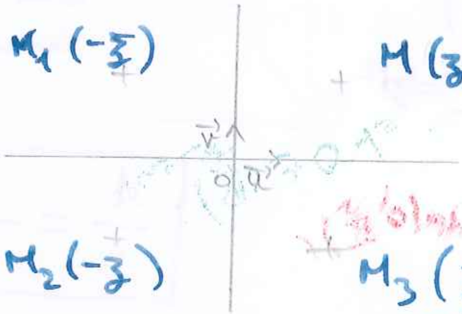
O est réel et imaginaire pur ($0 \in \mathbb{R}$ et $0 \in i\mathbb{R}$) ← ensemble des imaginaires purs

+ $\frac{1}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ (« L'inverse du conjugué est égal au conjugué de l'inverse »)

+ $\frac{\overline{z'}}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}$ (« Le quotient des conjugués est égal au conjugué du quotient »)

4_ Les conjugués

Il est utile de bien connaître la configuration suivante :



$z = Re(z) \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow \underbrace{z - \overline{z}}_{\text{imaginaire pur}} = 0$

$z = Im(z) \Leftrightarrow z = -\overline{z} \Leftrightarrow \underbrace{z + \overline{z}}_{\text{réel}} = 0$

Note : $\overline{(\overline{z})} = z$

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\left[\overline{(a+ib+a'+ib')} = (a+a') - i(b+b') = a-ib+a'-ib'\right]$

+ $z = z' \Leftrightarrow \overline{z} = \overline{z'}$

De la même, on a :

$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $\quad \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ $\quad \overline{z^n} = \overline{z}^n$

IV_ Equation du 2nd degré à coefficient réel (ds $\mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} P(z) &= az^2 + bz + c \quad (a \in \mathbb{R}^* \ (b,c) \in \mathbb{R}^2) \\ &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

$$P(z) = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

+ 3 cas :

- $\Delta = 0$ P admet une racine double réelle

$z_0 = -\frac{b}{2a}$ $\quad P(z) = a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$

→ **Inverse** : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \wedge \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \arg(1) - \arg(z) \equiv -\arg(z) \; [2\pi]$

+ Exemple : $z = (1 - i\sqrt{3})^5$
$= \left[2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^5$
$z = \left[2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^5$

(Ne pas travailler directement sur les formes trigo, mais sur les modules et argument)

D'après la formule de Moivre : $z = 2^5 \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

VI _ Forme exponentielle d'un complexe

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\cos x + i\sin x}{e^{ix}}$, f est le quotient de 2 fonctions dérivables, donc est dérivable

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(\frac{\cos x + i\sin x}{e^{ix}}\right)'$

$$= \frac{(-\sin x + i\cos x)e^{ix} - (\cos x + i\sin x)ie^{ix}}{(e^{ix})^2}$$

$$= \frac{-\sin x + i\cos x - i\cos x - i^2\sin x}{e^{ix}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0$

$f(x) = f(0) = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{e^{i0}} = 1$

$\Rightarrow \boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$

D'où, pour z un complexe tel que $|z| = 1$, $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

+ **Forme expo**

$$z = |z|e^{i\theta}$$

+ **Règles de calcul**

Pour $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ on a :

+ $\rho e^{i\theta} \times \rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$
+ $\frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$
+ $\rho e^{i\theta} = \rho e^{i(-\theta)} = \rho e^{-i\theta}$
+ $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'} \Leftrightarrow \rho = \rho' \wedge \theta \equiv \theta' \; [2\pi]$

Formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Identité d'Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$ / $e^{i\pi} + 1 = 0$ / $e^{i\pi} + 1 = 0$

5 nombres fondamentaux

- 0 → Element neutre de l'addition
- 1 → Element neutre de la multiplication
- π → Rapport de la circonférence sur le diamètre
- i → Nombre imaginaire, seul nombre dont l'opposé est égal à l'inverse, permet de résoudre toutes les équations polynomiales
- e → Base des logarithme naturel (népérien), exponentielle égale à sa dérivée

- Plus Remarquable formule du Monde -
Richard Feynman

+ Formules d'Euler

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \wedge \quad e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta$

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

VII _ Applicaᵒ des complexes à la géométrie

Affixe d'un vectᵘ : $\overrightarrow{AB}$ $(z_B - z_A)$

Affixe d'une Σvectᵘ : $(\vec{u} + \vec{v})$ $(z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}})$

Affixe d'un vectᵒ par un réel : $\lambda\vec{u}$ $(\lambda z_{\vec{u}})$

Affixe du barycentre :

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)\overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

pour $M = O$:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right) z_G = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_{A_i}$$

Note :

$A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4)$

$$\arg(z_2 - z_1) - \arg(z_4 - z_3) = \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}\right)$$

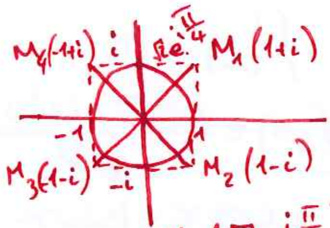
$$= \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{DC}}}\right)$$

$$= \arg(z_{\overrightarrow{BA}}) - \arg(z_{\overrightarrow{DC}})$$

$$= (\vec{u}, \overrightarrow{BA}) - (\vec{u}, \overrightarrow{DC})$$

$$= (\overrightarrow{DC}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BA})$$

$\arg(z_{\overrightarrow{BA}}) - \arg(z_{\overrightarrow{DC}})$ $= (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA})$



$M_1\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$

$M_2\left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$

$M_3\left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)$

$M_4\left(\underbrace{\sqrt{2}}_{\text{diagonale d'un carré de côté 1}}\, \underbrace{e^{i\frac{3\pi}{4}}}_{\text{angle}}\right)$

Expression Complexe de la rotation

$\Omega(\omega)$, $z \neq \omega$

$$\begin{cases} M' = R(\Omega,\theta)(M) \\ M \neq \Omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

$$M' = R(\Omega,\theta)(M) \Leftrightarrow z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$$

Dénombrement

I - p-listes d'élém^t d'un ensemble fini

1- Déf^o

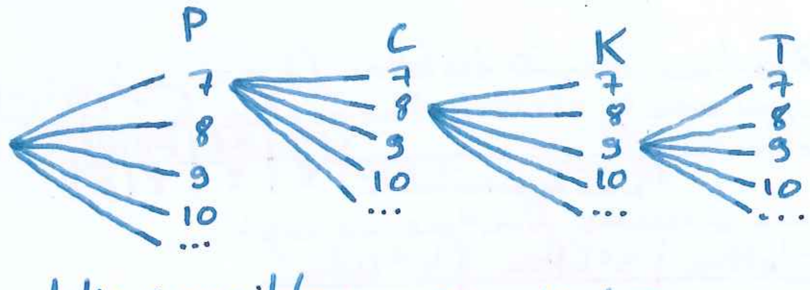
Soit E, un ensemble à n élém^t et $p \in \mathbb{N}^*$.
On appelle p-liste d'éléments de E, une liste ordonnée de p élém^t de E. → ou p-uplets

Ex: Si E est l'ensemble des lettres de l'$\alpha\beta$: $E = \{a, b, \dots, z\}$
le mot ananas (a, n, a, n, a, s) est une 6-liste d'élém^t de E
(a, b) et (b, a) st des couples d'élém^t de E. { 2-listes
(a, b, a), (a, a, b), (b, a, a) st des triplets d'élém^t de E. { 3-listes

Rmq: Une p-liste peut ê assimilée à une issue de tirages successifs de p élém^t parmi n avec remise. ↳ ordre
→ répéti^o possible des élém^t : $p > n$ est possible

2- Nbre de p-listes (cardinal de E^p)

Ex: Tapis Vert (jeu de 32 cartes : ♠ = P, ♡ = C, ♢ = K, ♣ = T)
→ Tirages possibles : 10_P, V_C, D_K, 1_T ; 7_P, 7_C, V_K, 8_T
→ (10, V, D, 1) est une 4-liste d'élém^t de E^4
↳ Le tirage du Tapis Vert peut ê assimilé aux tirages successifs de 4 élém^t pris parmi les 8 élém^t de $E = \{7, 8, 9, 10, V, D, R\}$. Les issues d'une telle expérie^N aléatoire st des 4-listes d'élém^t de E, l'univers est $E^4 = \{(7,7,7,7), (7,7,7,8), \dots, (1,1,1,1)\}$ {modélisé par
→ Arbre (modélisé) :



→ Autre modélisa^o possible :

	P	C	K	T
choix	8	8	8	8

$8 \times 8 \times 8 \times 8$ → $card(E^4) = 8^4$

+ Cas général

Si $card(E) = n$, alors le nbre de p-listes d'élém^t de E est n^p.

II - Arrange^t et permuta^o

1- Déf^o

Soit E, ac n élém^t, et $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $p \leq n$.
On appelle arrange^t de p élém^t de E, une liste ordonnée de p élém^t de E distincts 2 à 2.

Ex: E, ensemble des lettres de l'$\alpha\beta$.
+ (c, o, u, p, l, e) est un arrangt de 6 élémt de E.
+ (a, l, o, r, s) & (o, u, i) aussi, ms (l, e, t, tre) n'est pas un arrangt.
+ {c, o, u, p, l, e} : y'a pas d'ordre (ce n'est pas un arrangt)

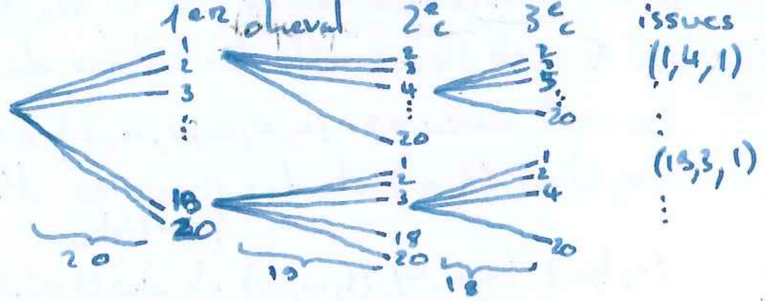
Rmq: Une expérien aléatoire dt une issue est un arrangt peut ê assimilé à des tirages successifs, ss remise, de p élémt parmi n.

2 - Nbe d'arrangt de p élémt

Ex: Tiercet : on considère une course de 20 chevx (E).
→ Un triplet possible est un triplet possible sans répéti° (arrangt à 3 élémt) de l'ensemble E [les situa° d'ex-aequo st exclues].

Choix du 1er cheval	Choix du 2e cheval	Choix du 3e cheval
20	19	18

$20 \times 19 \times 18 = 6840$



+ Cas général

Soit $E = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$
On cherche le nbr d'arrangt de p élémt de E ($p \leq n$)

1er élémt	2e élémt	...	p élémt
n possibilités	$(n-1)$ possibilités	...	$(n-p+1)$ possibilités

Note: lorsq $n = p$, on a un tirage successifs sans remise de ts les élémt de E
→ Ds ce cas on ne dit pas : "un arrangt de 15 élémt parmi 15", ms : "une permuta° de 15 élémt"

Il y a $n(n-1)\dots(n-(p-2))(n-(p-3))$ ar.
→ Nbe d'ar. de p élémt pris parmi n est:

$$\left(A_n^p\right) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

CALC : $n\mathrm{P}r$ → Nbr d'ar de r élémt parmi n / permuta° (OPTN → PROB)

→ Rmq : Ds le cas des permuta°, la formule reste valable car, par conven°, $0! = 1$.

3 - Exemple appliqué

On met ds une urne, 8 cartons marqués des lettres {f, r, a, n, c, o, i, s}.
1 → On tire un carton, on note le résultat, et on replace le carton (×3)
→ Nbr de mots qu'on peut obtenir :

	1e l	2e l	3e l	4e l
Nbr de possibilités	8	8	8	8

→ Nbr de mots débutn par une consonne, finissn par une voyl :

1e lettre	2e lettre	3e lettre	4e lettre
5	8	8	3

2 → On tire successivt les 8 cartons.
→ Nbr de mots possibles commn par 2 consonnes :

1e l	2e l	3e l	4e l	5e l	6e l	7e l	8e l
5	4	6	5	4	3	2	1

→ Nbr d'ar. de 6 lettres parmi 6 (permuta°)
→ Nbr d'ar de 2 lettres parmi 5

Les mots pouvn ê obtenus st les permuta° des 8 lettres du mot français !

$\mathrm{card}(B) = A_5^2 \times A_6^6$
$\mathrm{card}(\Omega) = A_8^8$

CALC : $n\mathrm{C}r$ → combinaison

Ex : $\binom{32}{4}$ → $32\, n\mathrm{C}r\, 4$

III _ Combinaison de p élém^t d'un ensemble

1- Déf°

Soit E, un ensemble de n élém^t, $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leq n$
Une partie (non ordonnée) de p élém^t de E est appellée une combinaison à p élém^t de E.

Ex: Tiercé (désordre)
→ issues possibles ds le cas du tiercé ordonné : $(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3) \ldots$ — Rmq: ce st les 6 (3!) permuta° possibles des chev^x 1, 2, 3 _
→ issues possibles ds le cas du tiercé désordonné: $\{1,2,3\}$ — Rmq: ds cet univers, il y a 3! ~~@ d'élém^t que ds l'univers des~~ issues ordonnées (arranger)
→ D'où $\boxed{\frac{A_p^n}{3!}}$

2- Cas général

Le nbr de combinaison de p élém^t parmi n

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{\text{nbr d'arr. de } p \text{ parmi } n}{\text{nbr permuta° de } p \text{ élém}^t}$$

Rmq: Une combinaison peut ê assimilée au résultat d'un tirage simultané de p élém^t pris parmi n.

3- Règles de calcul

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

↳ Dém° → $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{n}{p}$

Formule de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

ce qui est fixe — ce qu'on va placer

$\sqcup$ a, b

$\sqcup$ = b $\sqcup$ a / a $\sqcup$ b / a, b $\sqcup$

et

$$\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}$$

4- Formule du binôme

Triangle de Pascal

$a + b$ ↓ = — Formule de pascal

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	$\binom{0}{0}$ 1						
1	$\binom{1}{0}$ 1	$\binom{1}{1}$ 1					
2	$\binom{2}{0}$ 1	$\binom{2}{1}$ 2	$\binom{2}{2}$ 1				
3	$\binom{3}{0}$ 1	$\binom{3}{1}$ 3	$\binom{3}{2}$ 3	$\binom{3}{3}$ 1			
4	$\binom{4}{0}$ 1	$\binom{4}{1}$ 4	$\binom{4}{2}$ 6	$\binom{4}{3}$ 4	$\binom{4}{4}$ 1		
5	$\binom{5}{0}$ 1	$\binom{5}{1}$ 5	$\binom{5}{2}$ 10	$\binom{5}{3}$ 10	$\binom{5}{4}$ 5	$\binom{5}{5}$ 1	
6	$\binom{6}{0}$ 1	$\binom{6}{1}$ 6	$\binom{6}{2}$ 15	$\binom{6}{3}$ 20	$\binom{6}{4}$ 15	$\binom{6}{5}$ 6	$\binom{6}{6}$ 1

Formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \times b^k \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

ex : $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

Dém° 1- Récurren^ce, 2- Dénombre^t

1 → Soit P_n : « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \times b^k$ »

+ $(a+b)^1 = a+b$

$\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^{n-k} \times b^k = \binom{1}{0} a^1 \times b^0 + \binom{1}{1} a^0 \times b^1 = a+b \Rightarrow P_1$ est vraie

+ Supposons qu'il $\exists\, p$, tel que P_p soit vraie, i.e:

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k$$

$$\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k\right)(a+b) = (a+b)\left[\binom{p}{0}a^p b^0 + \binom{p}{1}a^{p-1}b^1 + \binom{p}{2}a^{p-2}b^2 + \ldots + \binom{p}{p-2}a^2 b^{p-2} + \binom{p}{p-1}a b^{p-1} + \binom{p}{p}a^0 b^p\right]$$

$$= \left[\binom{p}{0}a^{p+1}b^0 + \binom{p}{1}a^p b^1 + \binom{p}{2}a^{p-1}b^2 + \ldots + \binom{p}{p-2}a^3 b^{p-2} + \binom{p}{p-1}a^2 b^{p-1} + \binom{p}{p}a^1 b^p\right.$$

$$+ \binom{p}{0}a^p b^1 + \binom{p}{1}a^{p-1}b^2 + \ldots + \binom{p}{p-3}a^3 b^{p-2} + \binom{p}{p-2}a^2 b^{p-1} + \binom{p}{p-1}a^1 b^p + \binom{p}{p} \ldots$$

$$\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^{p-k}b^{k}\right)(a+b) = \binom{p}{0}a^{p+1}b^{0} + \left[\binom{p}{0}+\binom{p}{1}\right]a^{p}b^{1} + \dots + \left[\binom{p}{p-1}+\binom{p}{p}\right]a^{1}b^{p} + \binom{p}{p}a^{0}b^{p+1}$$

$$= \binom{p+1}{0}a^{p+1}b^{0} + \binom{p+1}{1}a^{p}b^{1} + \dots + \binom{p+1}{p}a^{1}b^{p} + \binom{p+1}{p+1}a^{0}b^{p+1}$$

$$(a+b)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}a^{p+1-k}b^{k+1}$$

D'où $P_p \Rightarrow P_{p+1}$

+ Dc (P_n) est vraie pr tt $n \geq 1$

2 → $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ fact}^{\circ}}$ ↳ Qd on développe les termes st de la forme $a^{n-k}b^{k}$

a^2b^{n-2} |a|a| ... |b|

a^2b^{n-2} |a|b|a| ... |b|

$\binom{n}{2}$ termes de cette forme

1er 2e — n^e

|a|a|b|...|b|b| → a^2b^{n-2}

etc.

|a|b|a|...|b|b| → a^2b^{n-2}

|a|a|a|...|b|b| → a^3b^{n-3}

Notes: • cf cours proba

• dém° formule de Pascal →

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$$
$$= \frac{(n-1)! \times p}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!}$$
$$= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$
$$= \binom{n}{p}$$

▷ Soit E, tel que card(E) $= n$, et soit $a \in E$

$\binom{n}{p}$ (pr $1 \leq p < n$) représ^n des combinaisons conten^{nt} ~~ou~~ non a.

Ainsi, on partitionne ces dernières en fonc° de ce paramètre

Si $a \in$ Combi, alors le nbr de combi est le nbr de combinaisons possibles de $p-1$ élém^t parmi card$(E\setminus\{a\}) = n-1$, soit $\binom{n-1}{p-1}$

Si $a \notin$ Combi, alors le nbr de combi est le nbr de combinaisons possibles de p élém^t parmi card$(E\setminus\{a\}) = n-1$, soit $\binom{n-1}{p}$

De cette manière, notre partion ns fourni la relat° $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

• Comprendre que placer 3 élém^t parmi 6 revient à choisir 3 élém^t ~~parmi~~ entre 6

→ 000000 = 000000 car choisir 3 parmi 6 revient à sélec° 3 entre les 6

• Récapitulatif:

nbr de p-listes possibles à l'aide de n élét : n^p → (1,2,3), (1,2,4), (1,3,2), (1,1,1)

nbr d'arrangement à p élét de n élét : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ → (1,2,3), (1,2,4), (1,3,2)

nbr de permuta° de p élét : $p!$ → (1,2,3), (1,3,2)

nbr de combinaisons à p élét de n élét : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ → $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$

Primitives d'une fonc°

I - Déf°

Soit f, définie sur I. On dit que F est une primitive de f sur I.
$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

+ Exemple : + $f(x) = \frac{x^2}{7} - \cos(2x+4)$
$= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}x^3\right)' - \left[\frac{1}{2}(2x+4)'\cos(2x+4)\right]$
$f(x) = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}x^3\right)' - \frac{1}{2}(\sin(2x+4))'$

$[x \mapsto \frac{1}{21}x^3 - \frac{1}{2}\sin(2x+4)]$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

+ $\forall x \in \mathbb{R}^{*+},\ f(x) = \frac{3}{x^4}$
$f(x) = \left(-x^{-3}\right)' = \left(-\frac{1}{x^3}\right)'$

$[x \mapsto -\frac{1}{x^3}]$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^{*+}$.

+ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^3}$
$f(x) = \left(-\frac{x}{4(x^2+1)^2}\right)'$

$\frac{1}{2u^2}$	$\frac{u'}{u^3}$
$-\frac{1}{4(x^2+1)^2}$	$\frac{x}{(x^2+1)^3}$

II - Propriétés

1 - Théorème d'ℑ[N]

Soit f définie et continue sur I, alors f admet une primitive F sur I.

Rmq : - f ne doit pas ê forcé^t continue
- on ne peut pas t^jr arriver à trouver la primitive.

↳ Si on arrive :

F(x)	
$\frac{u'}{u^n}$	$nu'u^{n-1}$

$\frac{u'v - v'u}{v^2}$, etc... ⇒ impossible

Ex :

f	$1/x^3$	$1/x^2$	$1/x$	1	x	x^2	x^3
F	$\frac{1}{-2x^2}$	$-\frac{1}{x}$	?	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$

$x^n \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n-1}$
$(f(x))' = x^n$

Primitive de la fonc° inverse : ln

2 - Détermina° de t^tes les primitives d'une fonc°

Soit f, admet^N des primitives sur I et F_0 une de ses primitives.

+ $F_k : x \mapsto F_0(x) + k$ $(k = \text{cste})$ st d'autres primitives de f sur I
+ Soit G une primitive de f sur I.

$\forall x \in I,\ (G - F_0)'(x) = G'(x) - F_0'(x)$
$(G - F_0)'(x) = f(x) - f(x)$
$(G - F_0)'(x) = 0$

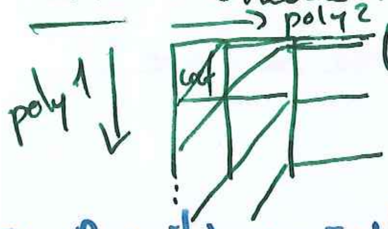
$G - F_0$ est cste sur I $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, G(x) = F_0(x) + k$

+ Théorème

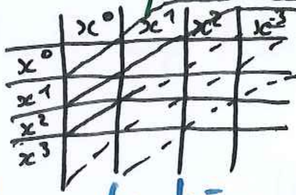
Soit F_0, une primitive de f sur I, alors ttes les primitives de f sur I st données par : $F_k : x \longmapsto F_0(x)$

Exemples : + $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, (\ln x)' = \frac{1}{x}$,
$u > 0, (\ln u)' = u' \times \ln' u = \frac{u'}{u}$

Note : méthode Mono de résolu° de produit de polynômes :



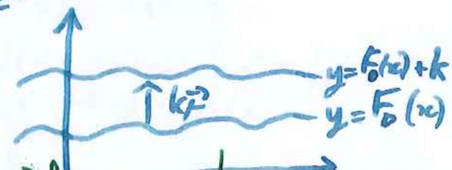
$\longrightarrow$



$(ax^0 + bx^1 + cx^2 + dx^3)(ex^0 + fx^1 + gx^2 + hx^3)$
$\to$ coef x^0
$\to + \to + \to = $ coef x^2

3 _ Primitives vérifiant une conditio particulière

Ex : Soit f, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{\sqrt{x}}$
$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, f(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{\sqrt{x}}$
$= -\frac{1}{\pi}(\pi x)' \cos'(\pi x) + 2(\sqrt{x})'$
$f(x) = \left(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + 2\sqrt{x}\right)'$



Les primitives de f sur $\mathbb{R}^{*+}$ st les fonc° : $F_k : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + 2\sqrt{x} + k \quad (k \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Aucune primitive ne passe par un pt d'une autre

Sach^{N} que $F_k(1) = 2$, déterminer la ou les primitives.
$F_k(1) = 2 \iff -\frac{1}{\pi}\cos(\pi \times 1) + 2\sqrt{1} + k = 2$
$\iff \frac{1}{\pi} + 2 + k = 2$
$\iff k = -\frac{1}{\pi}$

La primitive F sur $\mathbb{R}^{*+}$ de f telle que $F(1) = 2$ est : $F : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + 2\sqrt{x} - \frac{1}{\pi}$

$\to$ Si k décrit $\mathbb{R}$, 'on' décrit tt le plan ( ) : pb d'$\exists$ résolu°.

+ Théorème :

Soit f, continue sur I. Soit $x_0 \in I \wedge y_0 \in \mathbb{R}$, alors f admet une uniq primitive F sur I, vérifiant $F(x_0) = y_0$.

$\to \ln$ est l'uniq primitive de $\frac{1}{x}$ (continue sur $\mathbb{R}^{*+}$) telle que $F(1) = 0$

4 _ Calcul de primitives

+ $(F + G)$ est une primitive de $(f + g)$ si $F' = f \wedge G' = g$
+ kF $\quad$ " $\quad$ kf si $F' = f$
+ Fonc° usuel : $\int a\,dx = ax + c$, $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \; (x \in \mathbb{R} - \{-1\})$, $\int x^{-1} dx = \ln x + c$
+ Formules générales : $\forall n \neq -1, \forall x \in I, \int u' u^n dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$
$\left(\int u' u^{-1} dx = \ln|u| + C\right)$
$\to$ si $u > 0$ sur I : $\ln u$
si $u < 0$ sur I : $\ln -u$

Logarithme Népérien

I - Généralités

On a vu que la fonc° inverse est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$. Dc cette fonc° admet des primitives sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Déf° : On appelle logarithme népérien $\boxed{\ln}$, la primitive de la fonc° inverse sur $\mathbb{R}^{*+}$, qui s'annule en 1.

$$\forall x > 0, \begin{cases} \ln' x = \frac{1}{x} \\ \ln 1 = 0 \end{cases}$$

Immédiatet :

+ $\forall x > 0$, $\ln' x = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^{*+}$
+ Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^{*+2}$, $a \underset{<}{>} b \Leftrightarrow \ln a \underset{<}{>} \ln b \wedge a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$

$\rightarrow \underbrace{\begin{cases} a > 0 \\ a > b \\ b > 0 \end{cases}}_{\text{condi° suffisn et rassurn} \neq \text{condi° nécessR et suffisn}} \Leftrightarrow \ln a > \ln b$

condi° pas nécessR ms pas fausse

+ Exemple :

II - Propriétés algébrQ

1 - Propriété fondamentale

Soient $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(ax) \end{array}$, dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$

$\forall x > 0$, $f'(x) = (\ln(ax))' = a \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$

f est une primitive de $[x \mapsto \frac{1}{x}]$, dc : $\forall x > 0$, $f(x) = \ln x + c$

Pr $x=1$, $\ln(a \times 1) = \ln 1 + c \Rightarrow c = \ln a$

$\forall x > 0$, $\ln(ax) = \ln a + \ln x$

Pr ts a et b réels strictet positifs : $\triangle \; (ab) > 0 \not\Rightarrow a > 0, b > 0$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

2 - Conséqun

+ Soit $a > 0$

$\ln(\frac{1}{a} \times a) = \ln(\frac{1}{a}) + \ln(a) \wedge \ln(1) = 0$

$\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$

+ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^{*+}$

$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b})$

$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

+ Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$\ln(a^2) = \ln(a) + \ln(a) = 2\ln(a)$

$\ln(a^3) = \ln(a^2) + \ln(a) = 3\ln(a)$

+ Soit P_n : « $\ln(a^n) = n\ln(a)$ » $(a>0)$

+ P_0 : $\ln(a^0) = \ln(1) = 0\ln(a)$

P_0 est vraie.

+ On suppose qu'il P_k est vraie ($\exists k \in \mathbb{N}$, tel que)

P_k : $\ln(a^k) = k\ln(a)$

$\ln(a^{k+1}) = k\ln(a) + \ln(a)$

$\ln(a^{k+1}) = (k+1)\ln(a)$

P_{k+1} est vraie : $P_k \Rightarrow P_{k+1}$

+ D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$

+ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a^n}\right)$

$= -\ln(a^n)$

$\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$

On pose $k = -n$

$\ln(a^k) = k\ln(a)$

D'où : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^k) = k\ln(a)$

+ Cl° : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^k) = k\ln(a)$

+ Soit $a>0$

$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A>0 \\ B^2 = A \end{cases}$

$\ln\left[(\sqrt{a})^2\right] = \ln(a)$

$2\ln\sqrt{a} = \ln(a)$

$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln(a)$

+ Bilan

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^{*+}$ et $n \in \mathbb{Z}$

+ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

+ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

+ $\ln(a^n) = n\ln a$

+ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

⚠ Si $a<0$, $b<0$ $\ln(ab)$ existe ms la propriété fondamentale ne peut pas ê appliquée directement ⚠

$\rightarrow$ $\ln(ab) = \ln((-a)(-b))$

$\ln(ab) = \ln(-a) + \ln(-b)$

D'une ^n^ générale :

$\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$

$\ln(a^n) = n\ln|a|$

III _ Etude de la fonc° ln

_ $D_{\ln} = \mathbb{R}^{*+}$

_ $\forall x<0$, $\ln' x = \frac{1}{x}$

_ limites : a $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ b $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$

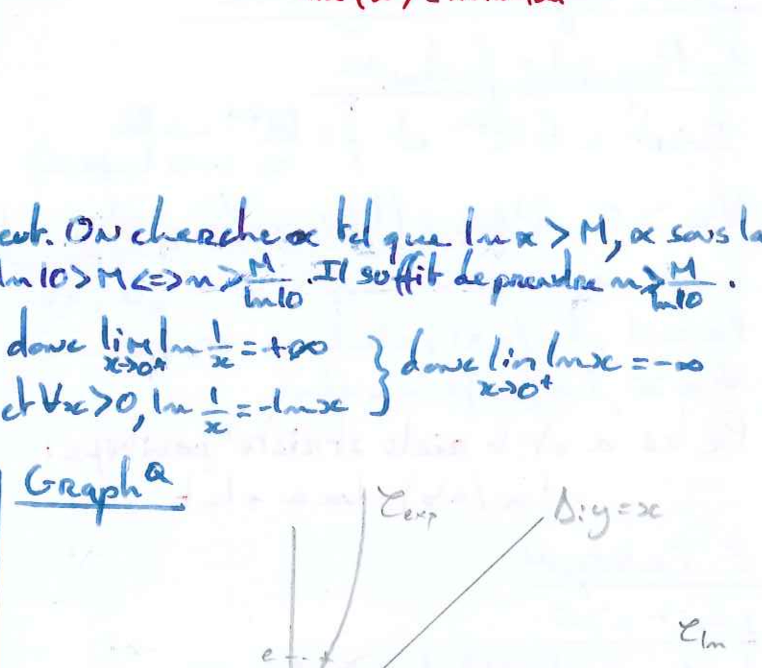
dém° a Soit $M \in \mathbb{R}$, aussi grd que l'on veut. On cherche x tel que $\ln x > M$, x sous la forme $x = 10^n$. $\ln 10^n > M \Leftrightarrow n\ln 10 > M \Leftrightarrow n > \frac{M}{\ln 10}$. Il suffit de prendre $n > \frac{M}{\ln 10}$.

b On pose $X = \frac{1}{x}$: $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} X = +\infty$, $\lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ } donc $\lim_{x\to 0^+} \ln\frac{1}{x} = +\infty$ et $\forall x>0$, $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$ } donc $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

_ Tabl^x^ de varia°

x	0	1	$+\infty$
$\ln' x = 1/x$	‖	1 +	
$\ln x$	‖ $-\infty$	0 ↗	$+\infty$

Graph^q^



_ T_1 : $y = (\ln' 1)(x-1) + 0$

$y = x$

_ ln est continue et ↗ sur $\mathbb{R}^{*+}$, de $\ln(\mathbb{R}^{*+}) =]\lim_{x\to 0}\ln x ; \lim_{x\to+\infty}\ln x[= (\mathbb{R})$. ln est une bijec° $\mathbb{R}^{*+}$ ds $\mathbb{R}$. (cha^q^ nbr à un antécéd^t^ par ln) en particulier 1. On va montrer que l'antécéd^t^ de 1 par ln est e.

_ cf dém° $\rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$, $e^{\ln x} = x$

ln et exp st 2 bijec° réciproq l'une de l'autre

_ Complément lim :

_ $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

_ $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Rmq : symétrie par rapport à la droite d'échange : $y = x$

IV Croiss^N comparée

+ Soit $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x - \sqrt{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, f'(x) = (\ln x - \sqrt{x})'$
$= \ln' x - (\sqrt{x})'$
$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f'(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{x}$

$\forall x > 4, x > 2\sqrt{x}$, $\frac{1}{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Dc f est ↘ sur $]4;+\infty[$. De m̄ f est ↗ sur $]0,4]$.
Dc f atteint son max en 4 et $f(4) = 2\ln 2 - 2$.
$1 < 2 < e \Rightarrow 0 < \ln 2 < 1 \Rightarrow f(4) < 0$
Dc $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, f(x) < 0$
$\ln x < \sqrt{x}$
$\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\forall x > 1, 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$

D'après le th^ē des gendarmes: $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \text{et}, \forall n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}, \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

+ On pose $X = \frac{1}{x}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} X = +\infty \\ \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} x \ln \frac{1}{x} = 0 \\ \text{et } \ln \frac{1}{x} = -\ln x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} x \ln x = 0 \\ \text{et}, \forall n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}, \lim_{x\to 0} x^{n-1} = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$

Limites particuli^ē

$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

+ cos : $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

+ exp : $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \xrightarrow{h = x-1} \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} = 1$

+ ln : $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \xrightarrow{h = x-1} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Approxima° affine

P^r h ds un voisinage de 0 : $\ln(1+h) \approx h$
$\forall x > -1, \ln(1+x) = x + \varepsilon(x)$ où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
$[x \mapsto x]$ est la meilleure approxima° affine de $[x \mapsto \ln(1+x)]$ au voisinage de 0

V_ Dérivée de $\ln \circ |u|$ ($u \neq 0$ sur I)

+ Soit I, tel que $u > 0$, alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, (\ln \circ u)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
+ Soit I, sur leq^l u est dérivable et ne s'annule pas, alors $\ln \circ |u|$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, (\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

dém° : cas de $u < 0$: $\forall x \in I, (\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ (car $|u(x)| = -u(x)$) ← $\ln|R$

+ conséq^N : une primitive de $\left[x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}\right]$ est $[x \mapsto \ln|u(x)|]$

En particulier $[x \mapsto \frac{1}{x}]$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}^+$ est $[x \mapsto \ln|x|]$ soit $[x \mapsto \ln -x]$

VI _ Fonc° logarithme décimal

1_ Déf°

Pr tt $x>0$, on pose $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Rmq $\log x \simeq 0{,}43 \ln x$

2_ Propriétés

+ $\log 10 = 1$, $\log 10^2 = 2$, $\log 10^3 = 3$ → $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\log 10^n = n$
+ $a>0, b>0$, $\log(ab) = \log a + \log b$

  $\log\left(\frac{1}{b}\right) = \log(1) - \log b = -\log b$

  $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

  $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\log(a^n) = n \log a$ ($\log\sqrt{a} = \frac{1}{2}\log a$)
+ $D_{\log} = \mathbb{R}^{*+}$, log est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$

x	0	$+\infty$
$\log x$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

+ Utilités : → pH = -log
  → historiQ (cf Table)
  → Richter $\log \frac{I}{I_0}$
  → Graph^Q (cf Ech^t logarithm^Q)

VII _ Puissances d'un réel strict^t positif

1_ Déf°

$\forall a>0, \forall (b,b') \in \mathbb{R}^2$, $a^b = e^{b\ln a}$

→ $a^{b+b'} = a^b a^{b'}$, $a^{b-b'} = a^b a^{-b'}$, $(aa')^b = a^b a'^b$, $\left(\frac{a}{a'}\right)^b = a^b a'^{-b}$

2_ Fonc° Racine n-ième

$\forall a>0, \forall n \in \mathbb{R}$, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

3_ Fonc° expo^{ne} de base a

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = e^{x\ln a}$ ($f_a : x \mapsto a^x$)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_a(x) = (\ln a)e^{x\ln a} = \ln(a)\, a^x$

→ Les fonc° de base $a>1$ _ st symé^Q par rapport à (Oy) à leur fonc° de base $\frac{1}{a}$
_ st symé^Q " (Ox) à leur opposé (comme toutes les fonc°)
_ st symé^Q " $\Delta : y=x$ à leur fonc° récipro^Q : les fonc° logarithme de base a.

→ Pr $0<a<1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x	$+\infty$ ↘	1 ↘	0

Pr $0>a>1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

NB : Suites _ arithméti^Q : croissance linéaire
_ géométri^Q : croissance exponentielle

Fonc° poly → parabole
ratio → hyperbole
affine par morceaux (composée de val^r absolue + fonc° affines) → ligne brisée

Calcul Intégral

I_Déf°

1_Déf°

Tte fonc° continue sur I admet des primitives sur I.
Si F et G st deux primitives de f sur I, alors $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, F(x) = G(x) + k$
Dc, quelque soit $(a,b) \in I^2$: $F(b) - F(a) = [G(b)+k] - [G(a)+k]$
$$F(b) - F(a) = \underbrace{G(b) - G(a)}$$
Un nbre qui dépend uniquet de f, a, b. Il est calculé à l'aide d'une primitive ms n'en dépend pas. On le note :
$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = [G(t)]_a^b = G(b) - G(a)$$

2_Déf°

Soit $(a,b) \in I^2$, f continue sur I, F une primitive de f sur I
On appelle intégrale de a à b de f, le réel $F(b)-F(a)$, on le note $\int_a^b f(t)\,dt$

variable muette servant à la notat°

3_Fonc° intégrale

Soient f continue sur I et $a \in I$. $\exists!$ primitive de f telle que $F(a) = 0$.
$F : I \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \int_a^x f(x)\,dx$

Dém° Soit G une primitive de f sur I
$\int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a)$
$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = G'(x) = f(x)$; $\int_a^x f(t)dt$ est bien la primitive de f s'annulant en a.
$\int_a^a f(t)\,dt = 0$

Notes : + Méthode des rect^N (de m̄ pr ce des trapèzes)
-> Construire les rect^N min et maj et leur associer une suite
ex : $s_n = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \wedge S_n = \frac{1}{n}\sum_1^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \Rightarrow S_n - s_n = \frac{1}{n}(f(1) - f(0))$
-> Encadrer l'aire et montrer l'adjacen^N des suites, leur lim
+ Amplitude de l'intervalle : $m \leq x \leq M \to M - m$ (erreur : $\frac{M-m}{2}$) $\Rightarrow \left|x - \frac{M+m}{2}\right| \leq \frac{M-m}{2}$

4_Interpréta° géoméa

Théorème (admis) : Soit $(a,b) \in I^2$, tel que $\boxed{a<b}$. Soit f continue et $\boxed{\text{positive}}$ et $\mathcal{C}$ la représenta° graph^e de f ds un rep$^{\bar{e}}$ orthogonal.
Exprimée en unité d'aire, l'aire de la surface (du domaine) limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et $x=a$ et $x=b$ est $\mathcal{A} = \int_a^b f(t)\,dt$

⚠ Tjr vérifier les condi° d'applica° ⚠ Graphiquet :

Rmq : Soit g négative et continue sur $[c,d]$. $\mathcal{A} = -\int_c^d g(t)\,dt$ où $\mathcal{A}$ est en u.a. l'aire du domaine défini entre $\mathcal{C}_g$, (Ox) et les droites d'équa° $x=c$ et $x=d$

Dém° $\int_c^d |g(t)|\,dt = \mathcal{A}$ ① $(|g| > 0)$ et $\forall x \in [c,d], |g(x)| = -g(x)$
$\int_c^d |g(t)|\,dt = \int_c^d -g(t)\,dt$. Soit G une primitive de g sur $[c,d]$: $(-G)' = -G' = -g$
$-G$ est une primitive de $-g$ sur $[c,d]$ dc $\int_c^d |g(t)|\,dt = [-G(t)]_c^d = G(c) - G(d) = -\int_c^d |g(t)|\,dt$
De 1 et 2, on a : $\int_c^d g(t)\,dt = -\mathcal{A}$

Rmq : Soit f continue sur $[a, b]$, l'aire (en u.a.) du dom^N compris entre $\mathcal{C}_f$ Ox et les droites d'équa° $x = a \wedge x = b$ est $\mathcal{A} = \int_a^b |f(t)| dt$

II _ Propriétés de l'$\int$

1_ Rela° célébrissime de Chasles

Soient f continue sur I et $(a, b, c) \in I^3$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Interpréta° géom^{que} : 

Dém° : Passer par la primitive

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt \longrightarrow \text{dém°}$$

Rmq $\int_a^a f(t)dt = 0$

2_ Linéarité

Soient f et g continues sur I, soient $(a, b) \in I^2$ et soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Dém° → On passe par la linéarité de la dériva°/intégra°

3_ Positivité

▷ Propriété 1 : Soit f continue sur I et soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a \leqslant b$

Si $\forall x \in [a, b], f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$

Dém° Analyt^a Soit F une primitive de f sur I

$\forall x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$, $F'(x) \geqslant 0$ dc F est croiss^N sur I

~~Or~~ + $a \leqslant b$, dc F est croiss^N sur $[a, b]$ et $F(b) \geqslant F(a)$

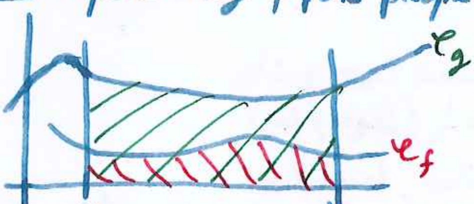
$F(b) - F(a) \geqslant 0$

$\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$

▷ Propriété 2 : Soient f et g continues sur I, soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a \leqslant b$

Si $\forall x \in [a, b], f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Dém° On pose $h = g - f$ puis propriété 1 puis Linéarité



Rmq L'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équa° $x = a$ et $x = b$ $(a \leqslant b)$ est en u.a.

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$$

III _ Méthodes de calcul d'$\int$

1_ Recherche de primitives

→ cf chap.07

2_ Intégra° par parties

Soient f et g dérivables sur $[a, b]$. On suppose que f' et g' st continues sur $[a, b]$

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Note : traduc° de $(uv)' = u'v + uv'$ pr le calcul intégral : $\int (uv)' = \underbrace{\int u'v + u'v}_{} = [uv]$

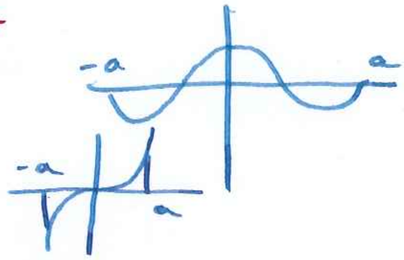
dém° $\int_a^b (f(t)g'(t) + f'(t)g(t))dt = [f(t)g(t)]_a^b = \int_a^b (fg)'(t)dt$

3 – Parité et périodicité

+ Intégrale d'une fonc° paire :

Soit f continue et paire sur $[-a, a]$ (centré en 0), alors :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$



+ Intégrale d'une fonc° impaire :

Soit f continue et impaire sur $[-a, a]$, alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$$

+ Intégrale d'une fonc° périod^{a}

Soit f continue et périod^{a} sur $\mathbb{R}$, et de période T.

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{T} f(t)\,dt \quad \wedge \quad \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

4 – Propriétés complém^{NR}

+ Inégalités de la moyenne

Thm 1 : Soit f continue sur $[a, b]$, m et M deux réels, tels que :

$\forall x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$

Dém° : $\forall x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$

$\int_a^b m\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b M\,dt$

$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$

Thm 2 : Soit f continue sur I, et M un major^{t} de $[x \mapsto |f(x)|]$, on a alors :

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq M \Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq M|b-a|$$

Dém° : • 1er cas : $a \leq b$

$-M(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a) \Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq M(b-a)$

• 2^{e} cas : $b \leq a$

$-M(b-a) \leq \int_b^a f(t)\,dt \leq M(b-a) \Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq -M(b-a)$

+ Valeur moyenne

Soit f continue et positive sur $[a, b]$ ($a < a \leq b$)

La val^{r} moyenne de f sur $[a,b]$ est $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Divisibilité ds $\mathbb{Z}$

I - Définiᵒ

Soit a et b, des entiers relatifs.

Si $\exists k \in \mathbb{Z}$, $a = kb$ alors a est un multiple de b

Si de + $b \neq 0$, b est divisᵘ de a $\rightarrow$ $b | a$ (se lit : b divise a)

Ds ce cas, on dit aussi que a est divisible par b ou b divise a.

Un divisᵘ commun à a et b est un entier relatif qui divise à la fois a et b.

Rmq : 0 est multiple de tt entier, ms a un seul multiple : lui-m̄

Tt entier $n \neq 0$ a pr divisᵘ $1, n, -1$ et $-n$ (et un nbr fini de divisᵘ entre $-n$ et n)

Tt entier $n \neq 0$ a une infinité de multiples

Deux entiers st 1ers entre eux ssi leurs divisᵘ communs st -1 et 1

+ Transivité

Soit $b \neq 0$ et $c \neq 0$

Si c divise b et b divise a, alors $b = kc$ et $a = k'b$

$a = k'(kc) = (k'k)c$

Si on a a, b, c tels que $b \neq 0$ et $c \neq 0$, alors si c divise b et b divise a, alors c divise a.

+ Combinaison linéR

Si $c \neq 0$ divise a et b, $\exists (a', b') \in \mathbb{Z}^2$, $a = a'c$ et $b = b'c$

Dc $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $ma'c + nb'c = ma + bn$

Finalet, c divise ~~ma~~ ma + nb $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$

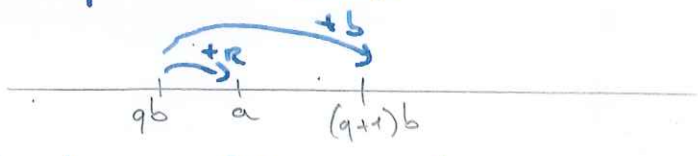
Si $c \neq 0$ est un divisᵘ commun à a et b, alors c divise $ma + nb$ $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$

$\rightarrow$ c divise tte combinaison linéaire entière de a et b.

II - La divᵒ euclidienne

1 - Ds $\mathbb{N}$

Ds la divᵒ euclidienne de a par b $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline R & q \end{array}$ (a : dividᵈᵉ, b : divisᵘ, R : reste, q : quotient), il existe un unᵠ couple $(q, R) \in \mathbb{N}^2$, $a = bq + R$ ac $0 \leq R < b$



CorrolR : - Ds la divᵒ euclidienne il n'y a que b restes possibles $(0, 1, 2 \ldots b-1)$

- b divise a ssi $R = 0$ $\quad b | a \Leftrightarrow R = 0$

2 - Extens° à $\mathbb{Z}$

On étend les résultats antériᵒ à $\mathbb{Z}$, pr $b \neq 0$:

$\exists (q, r) \in \mathbb{Z}^2$, $a = bq + r$ (et $0 \leq r < |b|$)

Rmq:

Tt élémt de $\mathbb{Z}$ admet $r=0$ ou $r=1$ ds la division euclidienne par 2.

$\Rightarrow$ un entier $\begin{cases} \text{pair se note } 2q \\ \text{impair se note } 2q+1 \end{cases}$ $q \in \mathbb{Z}$

III - Les congruences

Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $c \in \mathbb{Z}^*$

a et b ont le m̂ reste ds la division par c $\Leftrightarrow$ $a-b$ est un multiple de c.

$\Leftrightarrow$ a et b st congrus modulo c

$\Leftrightarrow$ $a \equiv b$ modulo c

$\Leftrightarrow$ $a \equiv b \ (c)$

Soient $(a, a', a'') \in \mathbb{Z}^{*3}$ et $c \in \mathbb{Z}^*$

Si $a \equiv a' \ (c)$ et $a' \equiv a'' \ (c)$ alors $a \equiv a'' \ (c)$ (ou $a \equiv a'' \ (-c)$)

Soient $(a, b, a', b') \in \mathbb{Z}^{*4}$ et $c \in \mathbb{Z}^*$

Si $a \equiv b \ (c)$ et $a' \equiv b' \ (c)$ alors :
- $a + a' \equiv b + b' \ (c)$
- $aa' \equiv bb' \ (c)$
- $a^n \equiv b^n \ (c)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

Raisonnement par récurrence

Il faut démontrer la proposition (P_n), où $n \in \mathbb{N}$.

1 - On prouve que (P_0) est vraie

2 - On prouve que :

"S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que (P_k) est vraie, alors (P_{k+1}) est vraie"

3 - On conclut que (P_n) est vraie quelque soit la valeur de n.

Exemple :

Soit (P_n) la proposition : "le polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ admet au plus n racines (les a_i n'étant pas tous nuls)"

$\rightarrow$ Pour $n = 0$,
$P(x) = a_0$ et $a_0 \neq 0$
Donc P n'admet aucune racine
$\Big\}$ (P_0) est vraie (I)

$\rightarrow$ (1) Supposons qu'il existe un entier k tel que (P_k) est vraie.
Supposons que $P(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ admet au plus k racines.
C'est à dire que $P(x) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i x^i$ admet au plus $k+1$ racines.
On veut prouver que $\sum^{k+1} a_i x^i$ admet au plus $k+1$ racines.

supposio par démonstration pour l'absurde

(Supposons que $\sum_{i=0}^{k+1} a_i x^i$ admet plus de $k+1$ racines.
On note α une de ces racines.
Il existe donc $b_0, b_1, \dots b_k$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{k+1} a_i x^i = (x-\alpha)\sum_{j=0}^{k} b_j x^j$

La proposition (P_k) étant supposée vraie, $\sum_{j=0}^{k} b_j x^j$ a au plus k racines.

Donc $\sum_{i=0}^{k+1} a_i x^i$ ne peut pas avoir plus de $k+1$ racines. Il y a contradiction avec l'hypothèse (1).

On vient de démontrer la propriété suivante : "s'il existe un entier k tel que (P_k) est vraie, alors (P_{k+1}) est vraie" (II)

De (I) et (II) on déduit que (P_n) est vraie quelle que soit la valeur de l'entier n.

II Fonctions trinômes et fonctions homographiques

① Une fonction trinôme a une expression de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

ⓐ Forme canonique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$
$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \longmapsto P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Recherche des racines (s'il en existe) de P.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ est le discriminant du polynôme). 3 cas :

$\boxed{\text{Cas où } \Delta < 0}$	$\boxed{\text{Cas où } \Delta = 0}$	$\boxed{\text{Cas où } \Delta > 0}$
$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$ $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ et $\frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ } Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ Donc $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \neq 0$ P n'a donc pas de racine (et P n'a pas de forme factorisée)	$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ P admet une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$ Forme Factorisée : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a(x - x_0)^2$	$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$ $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ $P(x) = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ P admet 2 racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ Forme Factorisée : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

ⓑ Représentation graphique

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$
$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

On pose : $f(x) = x^2$
$g(x) = f\left(x + \frac{b}{2a}\right)$
$h(x) = a \times g(x)$

On a alors $P(x) = h(x) - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$\mathcal{C}_f$ est une parabole orientée vers le haut de sommet $O(0,0)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On obtient $\mathcal{C}_g$ par translation de vecteur $\vec{t} = -\frac{b}{2a}\vec{\imath}$, donc $\mathcal{C}_g$ est une parabole orientée vers le haut de sommet $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$. On obtient $\mathcal{C}_h$ à partir de $\mathcal{C}_g$ en multipliant les ordonnées par a, donc $\mathcal{C}_h$ est une parabole orientée vers le haut si $a > 0$ ou vers le bas si $a < 0$ de sommet $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$. On obtient $\mathcal{P}$, représentative de P, par la translation de vecteur $\vec{t} = -\frac{b^2 - 4ac}{2a}\vec{\jmath}$.

Donc : $\mathcal{P}$ est une parabole orientée :
- vers le haut si $a > 0$
- vers le bas si $a < 0$
- de sommet $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{2a}\right)$

Théorème 1 : La représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'un polynôme du second degré est une parabole.

Théorème 2 (admis) : Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, toute parabole d'axe de symétrie vertical est la représentation graphique d'un polynôme de degré 2.

(suite dans ~~deux~~ pages)

$r(x) = s\left(x + \frac{d}{c}\right)$

$u(x) = \frac{bc-ad}{c^2} \times r(x)$

On a alors $h(x) = u(x) + \frac{a}{c}$

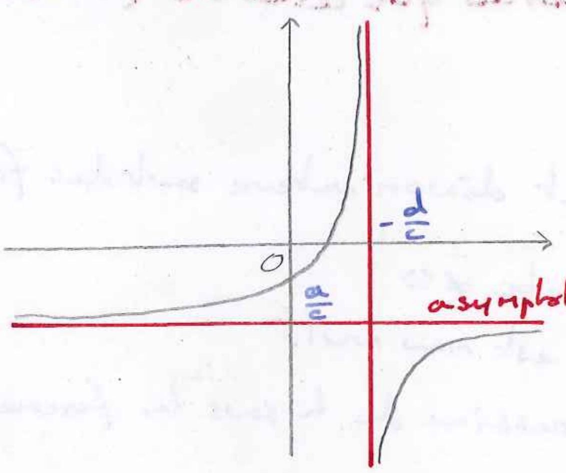
La représenta° graphi^Q de s est une hyperbole de centre $(0;0)$.

On obtient $\mathcal{C}_r$ à partir de $\mathcal{C}_s$ par la translaº de vecteur $\vec{t}_{\frac{d}{c}\vec{\imath}}$: $\mathcal{C}_s$ est une hyperbole de centre $\left(-\frac{d}{c};0\right)$.

On obtient $\mathcal{C}_u$ par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\frac{bc-ad}{c^2}$: $\mathcal{C}_u$ est une hyperbole de centre $\left(-\frac{d}{c};0\right)$

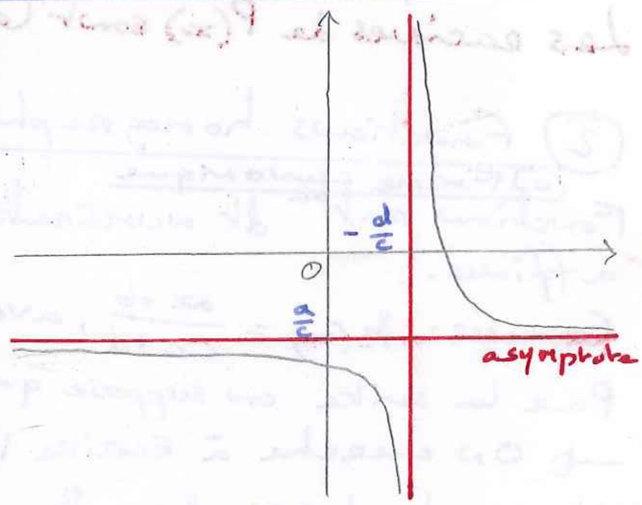
On obtient $\mathcal{H}$ à partir de $\mathcal{C}_u$ par la translaº de vecteur $\vec{t}_{\frac{a}{c}\vec{\jmath}}$: $\mathcal{H}$ est une hyperbole de centre $\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$

1er cas : $bc-ad<0$



x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$h(x)$	$\frac{a}{c}$ ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $\frac{a}{c}$

2nd cas : $bc-ad>0$



x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$h(x)$	$\frac{a}{c}$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $\frac{a}{c}$

c) Exemple

$h(x) = \frac{3x+2}{5x-7}$ $\quad D_h = \mathbb{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\}$

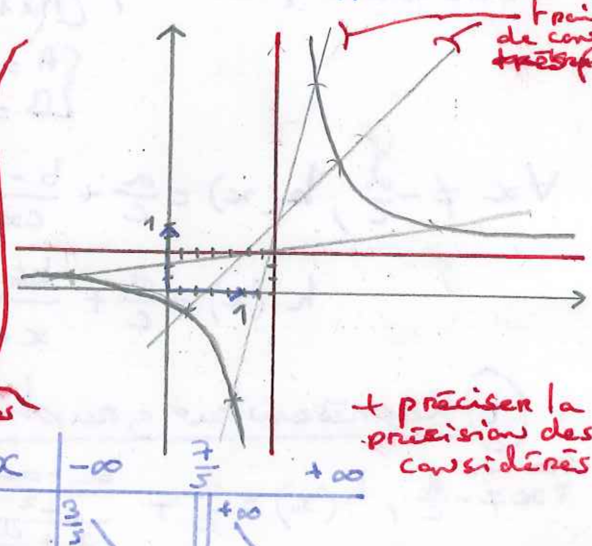
$\forall x \in D_h,\ h(x) = \frac{\frac{3}{5}(5x-7) + \frac{21}{5} + 2}{5x-7}$

$h(x) = \frac{3}{5} + \frac{\frac{31}{5}}{5x-7}$

$h(x) = \frac{3}{5} + \frac{\frac{31}{25}}{x - \frac{7}{5}}$

Savoir faire ce calcul

La représenta° graphi^Q de h est une hyperbole de centre $\left(\frac{7}{5};\frac{3}{5}\right)$.



Tracer les asymptotes en premier ! il faut les centrer au milieu de la feuille

x	$-\infty$	$\frac{7}{5}$	$+\infty$
$h(x)$	$\frac{3}{5}$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $\frac{3}{5}$

d) Somme et produit des racines

ex 104 p55

Soit P un polynôme de degré 2

+ $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ (1)

Si $\Delta > 0$, P a 2 racines x_1 et x_2

+ $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

$P(x) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2$ (2)

On pose $S = x_1 + x_2$

$P = x_1 x_2$

On a, par identification, de (1) et (2) $\begin{cases} S = \frac{-b}{a} \\ P = \frac{c}{a} \end{cases}$

Les racines de $P(x)$ sont les mêmes que celles de $(x^2 - Sx + P)$

2) Fonctions homographiques

a) Forme canonique

Fonction rat° dt numérateur et dénominateur sont des fonctions affines.

Express° : $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, avec $ad - bc \neq 0$

Par la suite on suppose que c est non nul.

→ On cherche à écrire l'expression de h sous la forme :

$\forall x \neq -\frac{d}{c}$, $h(x) = A + \frac{B}{cx+d}$

$h(x) = \frac{Acx + Ad + B}{cx+d}$

$\forall x \neq -\frac{d}{c}$, $Acx + Ad + B = ax + b$

Par identification, $\begin{cases} Ac = a \\ Ad + B = b \end{cases}$

$\begin{cases} A = \frac{a}{c} \\ B = b - \frac{ad}{c} \end{cases}$ $(c \neq 0)$

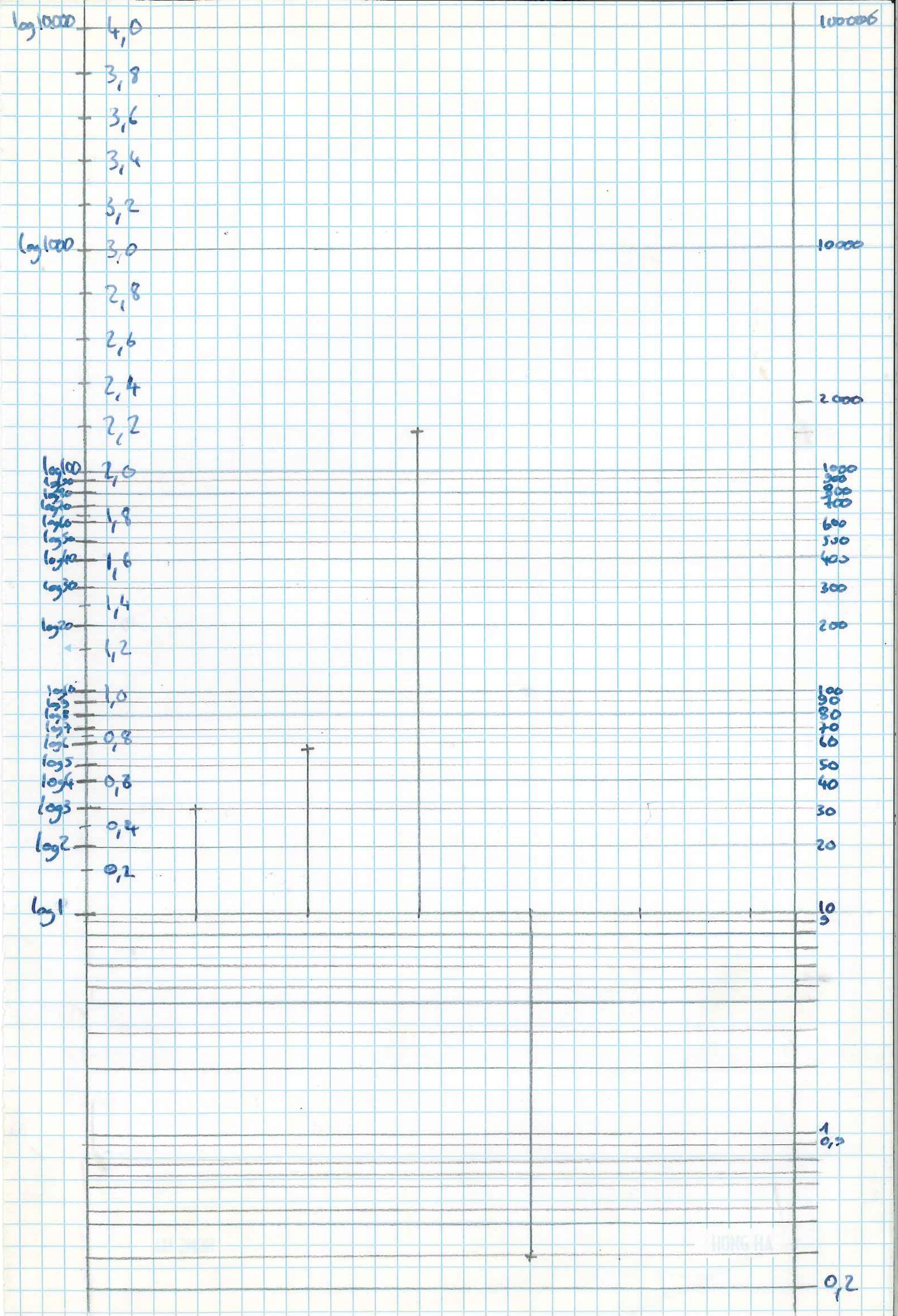
$\forall x \neq -\frac{d}{c}$, $h(x) = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d}$

$h(x) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}$ ← Forme canonique ⚠

b) Représenta° graphiQ

$\forall x \neq -\frac{d}{c}$, $h(x) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$

On pose : $s(x) = \frac{1}{x}$


log10000
4,0
3,8
3,6
3,4
3,2
log1000
3,0
2,8
2,6
2,4
2,2
log100
2,0
1,8
log50
log40
1,6
log30
1,4
log20
1,2
log10
1,0
0,8
log5
log4
0,8
log3
0,4
log2
0,2
log1
100000
10000
2000
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
9
1
0,9
0,2