アナログ計算と複雑度

河村彰星（トロント大学）

平成 21 年 7 月 29 日

物理現象は多く単純な微分方程式に従う．これを天然の計算機械と看做すとき，その能力や限界は如何なるものであろうか．このような「アナログ計算」の複雑度に関する研究について拙著[9, 10]を含め紹介する．

微分解析機と汎用アナログ計算機

初めて実用せられた大規模の計算機械はアナログ機であった．廻転運動を組合せて作った積分器を適当に接続することで微分方程式を解く**微分解析機**(Differential Analyzer)は早く 19 世紀に構想せられ，工作技術の進歩を待って 1930(昭和5)年頃に米国で完成した[3]．解くべき微分方程式に従う物理系を実際に作って測定するという正にアナログ(摸擬)の原理である．爾後デジタル機の優位が露になる迄の二十年程の間に機械式，電気式を合せて世界で十数台が造られた．大戦中の英国海軍でも使われたという．

この機械が生成し得る函数は如何なるものか．シャノン[20]は 1941(昭和16)年，微分解析機の数学模型として**汎用アナログ計算機**(General-Purpose Analog Computer)を定義した．これは図 1 の部品から成る有向グラフである．各辺には実函数が対応し，それらが満すべき方程式が辺の接続によって与えられている．例えば図 2 は三角函数を計算する機械である．尚お「汎用」を冠してはいるがこの模型は通常の計算論に謂わゆる万能機械

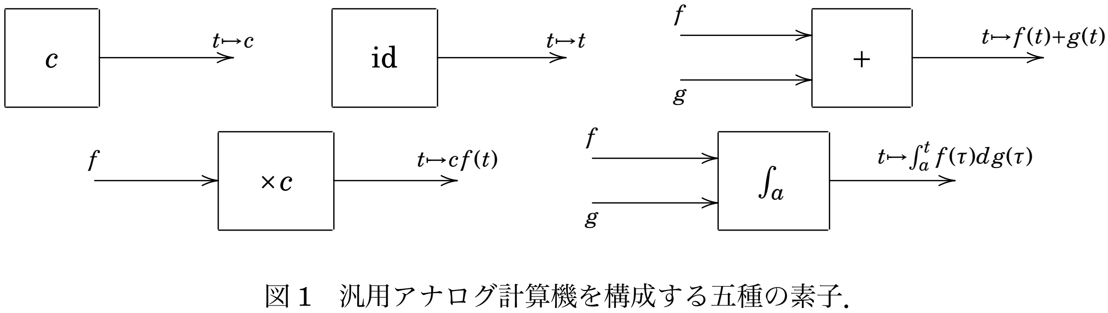
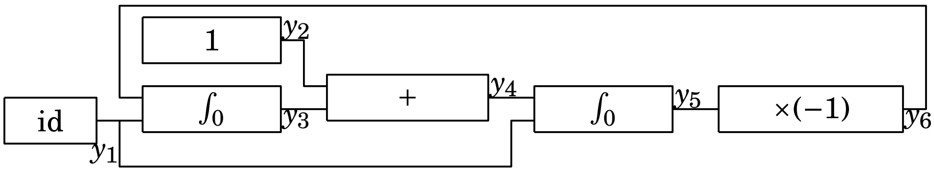


図 1　汎用アナログ計算機を構成する五種の素子．



$$\begin{cases} y_1(t) = t \\ y_2(t) = 1 \\ y_3(t) = \int_0^t y_6(\tau)\,\mathrm{d}y_1(\tau) \\ y_4(t) = y_2(t) + y_3(t) \\ y_5(t) = \int_0^t y_4(\tau)\,\mathrm{d}y_1(\tau) \\ y_6(t) = -y_5(t) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} y_1(t) = t \\ y_2(t) = 1 \\ y_3(t) = \cos t - 1 \\ y_4(t) = \cos t \\ y_5(t) = \sin t \\ y_6(t) = -\sin t \end{cases}$$

図 2　正弦函数を計算する汎用アナログ計算機(上)．このグラフが表す方程式(下左)を解くと y_5 が正弦函数となる(下右)．

ではない．望む函数毎に機械を造らねばならない．

シャノンによれば，実函数がこの模型によって計算せられるには，それが次に定義する微分代数(differentially algebraic)函数であることが必要十分である．この議論には若干の瑕疵があったが後に定義を修正して(少くとも一変数函数については)示された[5, 14, 18]．

定義 1　実解析函数 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が**微分代数的**であるとは，各 $x \in \operatorname{dom} f$ に対し実係数多項式 $P \neq 0$ が存在して x の或る近傍 U において次が成立つをいう．

$$P\bigl(f(\xi), f'(\xi), \ldots, f^{(r)}(\xi)\bigr) = 0 \qquad (\xi \in U) \tag{1}$$

実解析函数 $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ が**微分代数的**であるとは，引数の中 $m-1$ 個を如何に固定しても残る一引数の函数として微分代数的であることをいう．実解析函数 $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ が**微分代数的**であるとは成分毎に然るをいう．

例えば正弦函数 sin は方程式 $\sin''(x) + \sin(x) = 0$ の解であるから微分代数的である．微分代数的でないことを**超越超越的**(transcendentally transcendental)であるという．函数の超越超越性を証明することは易しくない．ヘルダー[7]が 1886(明治19)年に初めてガンマ函数について示した．以上微分代数函数や微分解析機の研究の歴史及び技術的詳細は吉川[22]に詳しい．

未解決問題 1　汎用アナログ計算機を二変数以上の函数へ自然に拡張することができるか

(できるとシャノン[20]は述べているがその意図は審らかでない[5])．そのとき微分代数性との関係は如何．

ムーアの実原始再帰函数

ムーア[16]は 1996(平成8)年，$\mathbf{R}^m$ より $\mathbf{R}^n$ への部分函数(m と n は非負整数)が**実原始再帰的**(real primitive recursive)であることを，(総ての m と n とについて同時に)再帰的に次の如く定義した．これは通常の自然数上の原始再帰(primitive recursive)函数の定義を形式的に真似たものである．

定義 2 (a) 定数函数 0，1，-1: $\mathbf{R}^0 \to \mathbf{R}^1$ はいずれも実原始再帰的である．

(b) もし $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ と $g\colon \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^m$ とが実原始再帰的ならば合成 $f \circ g$ も亦た然り．

(c) もし f_1，…，$f_n\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^1$ が実原始再帰的ならば，各 x を $(f_1(x),\dots,f_n(x))$ へ写す函数も亦た然り．

(d) もし $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ と $g\colon \mathbf{R}^{m+1+n} \to \mathbf{R}^n$ とが実原始再帰的ならば $h = \mathrm{D{\scriptstyle R}}(f,g)\colon \mathbf{R}^{m+1} \to \mathbf{R}^n$ も亦た然り．但し

$$h(u,t) = f(u) + \int_0^t g\big(u,\tau,h(u,\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

最後の構成(2)を**微分再帰**(differential recursion)と称する．もし h が可微分ならば

$$h(u,0) = f(u) \qquad \frac{\partial}{\partial t}h(u,t) = g\big(u,t,h(u,t)\big) \tag{3}$$

に等価であり，これは通常の原始再帰

$$h(u,0) = f(u) \qquad h(u,t) = g\big(u,t,h(t-1)\big) \tag{4}$$

に似せたものだというのである．ムーアは更に最小化に似せた演算子を加えて**実再帰函数**をも導入しているが本稿では扱わない．

未解決問題 2 この通常の再帰理論との類似を(超準解析などにより)何らかの意味で正当化できるか．

このムーアの仕事はアナログ計算の研究に一新期を劃するものであり，以来この函数類やその亜種が盛んに論ぜられている[2]．しかし原論文には幾つか曖昧な点があった．就中定義 2 の各項において新たに作られる函数の定義域が明らかでない[9]．例えば微分再帰(2)の被積分部が僅かに未定義となることを許すか．もしこれを許すときは図 3 の如く

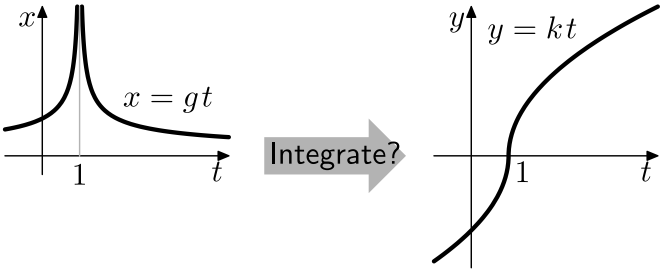


図 3　被積分部に特異点あるとき．

$\mathbf{R}\setminus\{1\}$ 上にて定義せられた $g(t)=1/\sqrt{|t-1|}$ という函数 g から $a(0)=-2$ と $a(t)=\int_0^t g(t)\,\mathrm{d}t$ とにより（単なる積分は(2)の特殊な場合に当る）定まる函数 a は

$$a(t)=\begin{cases}+2\cdot\sqrt{t-1} & t\geqslant 1 \text{ のとき}\\ -2\cdot\sqrt{-t+1} & t<1 \text{ のとき}\end{cases} \tag{5}$$

という全域函数であることになり，もし許さないときは同じ函数を $(-\infty,1)$ へ制限せるものになる．ムーアの研究に連なる夥しい論文の中，或るものは積分に影響の及ばない測度零の「穴」が被積分部にあることを明に許し，或るものは微分再帰の適用を特殊な g に限ることで全域函数のみが生ずるようにした状況を考え，或るものはこの曖昧に起因する誤りを含んだままである．

ムーアはこの実原始再帰函数が微分代数函数に（随って汎用アナログ計算機が出力する函数に）或る意味において一致すると主張しているが，拙著[9]にて指摘せる如くこれは誤りである．即ち，縦い上述の曖昧を除くにあたり「穴」を全く禁ずるを以てしても，仍お微分代数的でない実原始再帰函数が存在する．例えば函数 $k\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を $\operatorname{dom}k=(0,\infty)\times(0,\infty)$ と

$$k(x,t)=\int_1^t \frac{\tau^{x-1}}{\mathrm{e}^{\tau}}\,\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

とにより定義すると，k は実原始再帰的且つ超越超越的であることを，上述ヘルダーの結果からの帰着により示すことができる．尙お穴を許せば既述の例（図 3）の如く微分代数的は愚か解析的ですらない函数が生ずる．

グラサとコスタ[6]は可動（active）引数と羈縛（locked）引数との別を設けることにより微分再帰の適用を制限し，微分代数函数のみが得られるようにした．粗く言えばこれは t に沿うての積分(2)の適用を「一方向に限る」という制限である．上の反例(6)の右辺に現れる τ^{x-1} という函数は x に沿うての微分再帰によって作られる．このように一度 t 以外の

方向に積分を施して得られた項は禁じて(2)の被積分部に入れないことにすれば，超越超越函数が生じなくなるのである．

未解決問題 3　反例(6)は二変数函数であるが，実原始再帰的且つ超越超越的なる一変数函数は存在するか．

未解決問題 4　ムーアの実原始再帰（多変数）函数を何らかの意味で生成するアナログ機械を作ることはできるか．できないとすれば，それは何故か．

微分方程式の解の計算複雑度

汎用アナログ計算機も実原始再帰函数も，計算の基本単位は微分方程式を解く操作であった．そこで微分方程式の解が如何なる計算複雑度を有するかを考えよう．この問題については高崎[21]にも纏められている．

実函数の複雑度は葛とフリードマン[12]が導入した．

定義 3　(i)　実数 t の 2^{-m} **近似**（m は非負整数）とは，小数点以下に m 桁を有つ二進小数（を表す文字列）であって t を隔たること 2^{-m} に満たないものをいう．

(ii)　（全域）函数 $\varphi\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ が実数 t の**名**であるとは，各 $m \in \mathbf{N}$ に対して $\varphi(0^m)$ が t の 2^{-m} 近似であることをいう．

(iii)　神託チューリング機械 M が（全域）実函数 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ を**計算**するとは，任意の $t \in [0,1]$ の任意の名 φ に対して，M に神託 φ を与えたときに計算せられる函数 M^φ が $f(t)$ の或る名であることをいう（図 4）．

この機械 M が存在するとき f は可計算であるといい，特に多項式時間機械 M が存在するとき多項式時間可計算であるという．心せよ，ここに多項式といえるは M への入力文字列の長さに対してである．実数 t に依らない時間内で計算を終えねばならない．

この定義の下で g を多項式時間可計算と仮定するとき方程式(2)の解 h は如何に複雑であり得るか．ここでは簡単のため助変数 u 及び初期値 f を省いて方程式

$$h(t) = \int_0^t g\bigl(\tau, h(\tau)\bigr)\,\mathrm{d}\tau \tag{7}$$

を考えよう．多項式時間可計算という性質は有界閉集合上の函数にのみ定義したので（定義 3 (iii)の $[0,1]$ に代えて任意の有界閉集合を考えよ，二次元の場合は二つの神託を与へればよい)，$g\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ とし $h\colon [0,1] \to [-1,1]$ とする．

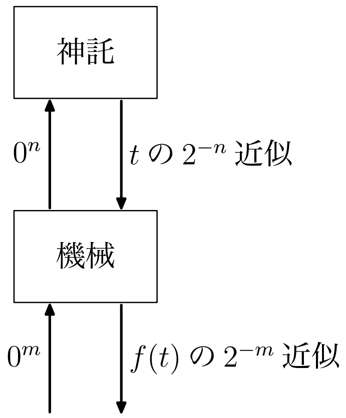


図 4　実函数 f を計算する機械.

さて一般に g に対して解 h が唯だ一つ存在するとは限らない．プルエル[19]は可計算函数 g であって解 h が悉く不可計算であるものを構成する一方，もし h が唯一解であればそれは可計算であることを指摘した．しかしこの唯一解の仮定のみにては，もし g が多項式時間可計算であっても h の計算時間を抑えられない[15].

解 h が唯一であるには次を満す定数 L が存在すれば十分であることが知られている.

$$|g(t,y_0)-g(t,y_1)| \le L \cdot |y_0-y_1| \qquad (t \in [0,1],\ y_0,y_1 \in [-1,1]) \tag{8}$$

これを**リプシッツ条件**(Lipschitz condition)という．葛[11]はこの条件の下で h が多項式空間可計算であることを示した．拙稿[10]ではこれが最良であること，即ち h が「多項式空間完全」であり得ることを示した.

右引数に関して連続可微分なる函数は，その偏導函数の上界を L とすれば明らかに(8)を満す．もし g が更に解析的であれば，謂わゆる級数による解法を考えると h は多項式時間可計算である[8]．纏めて表 1 に示す.

未解決問題 5　表 1 の下二行の間では何が起るか．例えば g が無限回可微分のとき h の複雑度如何.

未解決問題 6　他の形の微分方程式について表 1 と同様に計算複雑度を調べよ.

未解決問題 7　表 1 の上界は解 h の複雑度を限るが，数値計算の立場からいえば「g から h を計算する」ことの難易を知りたい．それは如何にして論ずべきか.

表 1　$g:[0,1]\times[-1,1]\to\mathbf{R}$ と $h:[0,1]\to[-1,1]$ とが方程式(7)を満し，g が多項式時間可計算であるときの h の複雑度.

仮定	h の複雑度の上界	h の複雑度の下界
なし	——	h は一意に定まらず且つ悉く不可計算であり得る［1, 11, 19］
h は唯一解	可計算［17, 19］	時間／空間複雑度は任意に大きくなり得る［11, 15］
リプシッツ条件(8)	多項式空間可計算［4, 11］	**PSPACE** 困難であり得る［10］
g は解析的	多項式時間可計算［8, 13］	——

文献

［1］ O. Aberth, “The failure in computable analysis of a classical existence theorem for differential equations,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 30, pp. 151–156, 1971.

［2］ O. Bournez and M. L. Campagnolo, “A survey on continuous time computations,” in *New Computational Paradigms*. Springer, 2008, pp. 383–423.

［3］ V. Bush, “The Differential Analyzer: A new machine for solving differential equations,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 212, pp. 447–488, 1931.

［4］ J. Cleave, “The primitive recursive analysis of ordinary differential equations and the complexity of their solutions,” *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 3, pp. 447–455, 1969.

［5］ D. S. Graça, “Some recent developments on Shannon’s General Purpose Analog Computer,” *Mathematical Logic Quarterly*, vol. 50, pp. 473–485, 2004.

［6］ D. S. Graça and J. F. Costa, “Analog computers and recursive functions over the reals,” *Journal of Complexity*, vol. 19, no. 5, pp. 644–664, 2003.

［7］ O. L. Hölder, “Ueber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen,” *Mathematische Annalen*, vol. 28, pp. 1–13, 1886.

［8］ A. Kawamura, “Complexity of initial value problems,” Submitted.

［9］ ——, “Differential recursion,” *ACM Transactions on Computational Logic*, vol. 10, no. 3, article 22, 2009.

［10］ ——, “Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete,” in *Proceedings of the 24th IEEE Conference of Computational Complexity*, 2009.

［11］ K. Ko, “On the computational complexity of ordinary differential equations,”

Information and Control, vol. 58, pp. 157–194, 1983.
[12] K. Ko and H. Friedman, "Computational complexity of real functions," *Theoretical Computer Science*, vol. 20, no. 3, pp. 323–352, 1982.
[13] ——, "Computing power series in polynomial time," *Advances in Applied Mathematics*, vol. 9, pp. 40–50, 1988.
[14] L. Lipshitz and L. A. Rubel, "A differentially algebraic replacement theorem, and analog computability," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 99, no. 2, pp. 367–372, 1987.
[15] W. Miller, "Recursive function theory and numerical analysis," *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 4, pp. 465–472, 1970.
[16] C. Moore, "Recursion theory on the reals and continuous-time computation," *Theoretical Computer Science*, vol. 162, pp. 23–44, 1996.
[17] W. F. Osgood, "Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung," *Monatshefte für Mathematik*, vol. 9, no. 1, pp. 331–345, 1898.
[18] M. B. Pour-El, "Abstract computability and its relation to the General Purpose Analog Computer (some connections between logic, differential equations and analog computers)," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 199, pp. 1–28, 1974.
[19] M. B. Pour-El and I. Richards, "A computable ordinary differential equation which possesses no computable solution," *Annals of Mathematical Logic*, vol. 17, no. 1-2, pp. 61–90, 1979.
[20] C. E. Shannon, "Mathematical theory of the Differential Analyzer," *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 20, no. 4, pp. 337–354, 1941.
[21] 高崎金久，微分方程式と計算可能性，数理解析研究所講究録 1020，39〜62 頁，平成 9 年(1997).
[22] 吉川敦，ガンマ関数と計算機——Hölder の論文をめぐって——，未定稿.