# アナログ計算と複雑度

河村彰星（トロント大学）

平成 21 年 7 月 22 日

物理現象は多く単純な微分方程式に従う．これを天然の計算機械と看做すとき，その能力や限界は如何なるものであろうか．このような「アナログ計算」の複雑度に関る研究について拙著［11, 14］を含め紹介する．

### 微分解析機と汎用アナログ計算機

1930〜50 年頃に造られた**微分解析機**（Differential Analyzer）［1］は，微分方程式を解くためにそれに従う物理系を作って測定することを原理とするアナログ式の計算機であった．その数学模型としてシャノン［6］は**汎用アナログ計算機**（General-Purpose Analog Computer）を定義した．この模型が生成する函数の全体は，**微分代数的**（differentially algebraic）な函数の全体に或る意味で一致することが判っている［6, 5, 4］．微分代数的とは導函数の間に自明でない代数方程式が成立つことをいう．例えば正弦函数 sin は方程式 $\sin''(x) + \sin(x) = 0$ の解であるから微分代数的である．ガンマ函数は微分代数的でない［3］．

［1］ V. Bush, “The Differential Analyzer: A new machine for solving differential equations,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 212, pp. 447–488, 1931.
［2］ D. S. Graça, “Some recent developments on Shannon’s General Purpose Analog Computer,” *Mathematical Logic Quarterly*, vol. 50, pp. 473–485, 2004.
［3］ O. L. Hölder, “Ueber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen,” *Mathematische Annalen*, vol. 28, pp. 1–13, 1886.
［4］ L. Lipshitz and L. A. Rubel, “A differentially algebraic replacement theorem, and analog computability,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 99, pp. 367–372, 1987.
［5］ M. B. Pour-El, “Abstract computability and its relation to the General Purpose Analog Computer (some connections between logic, differential equations and analog computers),” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 199, pp. 1–28, 1974.
［6］ C. E. Shannon, “Mathematical theory of the Differential Analyzer,” *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 20, pp. 337–354, 1941.
［7］ J. V. Tucker and J. I. Zucker, “Computability of analog networks,” *Theoretical Computer Science*, vol. 371, pp. 115–146, 2007.
［8］ 吉川敦，ガンマ関数と計算機——Hölder の論文をめぐって——，未定稿.

### ムーアの実原始再帰函数

ムーア［12］は通常の原始再帰函数の定義を形式的に真似て**実原始再帰函数**（real primitive recursive functions）を導入した．即ち通常の原始再帰函数が基本函数から合成と原始再帰とに

よって作られる自然数函数であるに対し，実原始再帰函数は合成と**微分再帰**（differential recursion）とによって得られる実函数をいう．微分再帰とは函数 $f\colon \mathbf{R}^m \rightharpoonup \mathbf{R}^n$ と $g\colon \mathbf{R}^{m+1+n} \rightharpoonup \mathbf{R}^n$ とから

$$h(u,0) = f(u) \qquad\qquad \frac{\partial h}{\partial t}(u,t) = g\bigl(u,t,h(u,t)\bigr) \tag{1}$$

という函数 $h\colon \mathbf{R}^{m+1} \rightharpoonup \mathbf{R}^n$ を得る操作である．実原始再帰函数を作る際には微分再帰(1)を異なる引数 $t$ に沿うて幾度も施すことができるため，微分代数的でない函数も生ずる[11]．


[9] O. Bournez and M. L. Campagnolo, "A survey on continuous time computations," in *New Computational Paradigms*. Springer, 2008, pp. 383–423.

[10] D. S. Graça and J. F. Costa, "Analog computers and recursive functions over the reals," *Journal of Complexity*, vol. 19, pp. 644–664, 2003.

[11] A. Kawamura, "Differential recursion," *ACM Transactions on Computational Logic*, vol. 10, article 22, 2009.

[12] C. Moore, "Recursion theory on the reals and continuous-time computation," *Theoretical Computer Science*, vol. 162, pp. 23–44, 1996.


### 微分方程式の解の計算複雑度

実函数についてその近似し難さに着目して多項式時間などの計算複雑度を論ずることは葛とフリードマン[16]を嚆矢とする．この尺度の下で方程式(1)は如何に複雑な函数を生ずるか．簡単のため $u$ と $f$ とを省いた次の方程式を考え，$g\colon [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ と $h\colon [0,1] \to [-1,1]$ とが全域にて定義せられ $g$ が多項式時間可計算であるとする．

$$h(0) = 0 \qquad\qquad h'(t) = g\bigl(t, h(t)\bigr) \tag{2}$$

このとき一般に $h$ は(2)の一意な解でないし，もし一意であっても複雑度は任意に高くなり得る[18, 15]．一意性の十分条件である $g$ のリプシッツ連続を仮定すると $h$ の複雑度は多項式空間まで落ちる[15, 14]．更に $g$ が解析的ならば $h$ も多項式時間可計算となる[17, 13]．


[13] A. Kawamura, "Complexity of initial value problems," Submitted.

[14] A. Kawamura, "Lipschitz continuous ordinary differential equations are polynomial-space complete," in *Proceedings of the 24th IEEE Conference of Computational Complexity*, 2009.

[15] K. Ko, "On the computational complexity of ordinary differential equations," *Information and Control*, vol. 58, pp. 157–194, 1983.

[16] K. Ko and H. Friedman, "Computational complexity of real functions," *Theoretical Computer Science*, vol. 20, pp. 323–352, 1982.

[17] K. Ko and H. Friedman, "Computing power series in polynomial time," *Advances in Applied Mathematics*, vol. 9, pp. 40–50, 1988.

[18] W. Miller, "Recursive function theory and numerical analysis," *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 4, pp. 465–472, 1970.

[19] M. B. Pour-El and I. Richards, "A computable ordinary differential equation which possesses no computable solution," *Annals of Mathematical Logic*, vol. 17, pp. 61–90, 1979.

[20] 高崎金久，微分方程式と計算可能性，数理解析研究所講究録 1020，39〜62 頁，平成 9 年（1997）．